Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hendrik Flasche

Sommersemester 2016
13. Juni 2016

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 8

Abgabe: 20. Juni 2016

Aufgabe 1 (1+1+1+1+1 Punkte)

(a) Sei $a_1, a_2, \dots$ eine nichtnegative, monoton fallende Folge. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$ genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty$.

(b) Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ divergiert.

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{1+\varepsilon}}$ konvergiert.

(d) Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)\log\log n}$ divergiert.

(e) Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^{1+\varepsilon}}$ konvergiert.

Aufgabe 2 (2+2+2+3 Punkte)

Sei Y eine nichtnegative Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon \in (0, 1)$,

$$\mathbb{P}[Y > \varepsilon \mathbb{E} Y] \geq (1-\varepsilon)^2 \frac{(\mathbb{E}[Y])^2}{\mathbb{E}[Y^2]}.$$

Hinweis: $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_{Y \leq \varepsilon \mathbb{E} Y}] + \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_{Y > \varepsilon \mathbb{E} Y}]$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}[Y = 0] \leq \frac{\operatorname{Var} Y}{\mathbb{E}[Y^2]}.$$

Hinweis: Teil (a).

(c) Seien $E_1, E_2, \dots$ (möglicherweise abhängige!) Ereignisse mit $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[E_k] = \infty$ und

$$\gamma := \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[E_i \cap E_j]}{(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}[E_k])^2} < \infty.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}[\text{unendlich viele Ereignisse } E_k \text{ treten ein}] \geq \gamma^{-1} > 0$.

(d) Leiten Sie aus (c) den zweiten Teil des Lemmas von Borel–Cantelli her: Sind $E_1, E_2, \dots$ unabhängige Ereignisse mit $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[E_k] = \infty$, so gilt

$$\mathbb{P}[\text{unendlich viele Ereignisse } E_k \text{ treten ein}] = 1.$$

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)

Betrachten Sie drei Folgen $(X_n), (Y_n), (Z_n)$ von Zufallsvariablen mit $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n \leq Y_n \leq Z_n] = 1$.

(a) Angenommen $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} W$, $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} W$. Zeigen Sie, dass $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} W$.

(b) Angenommen $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} W$, $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} W$. Zeigen Sie, dass $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} W$.