Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hendrik Flasche

Sommersemester 2016
6. Juni 2016

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 7

Abgabe: 13. Juni 2016

Aufgabe 1 (2+3+3 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Ist die Grundmenge Ω abzählbar, so folgt aus der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit die fast sichere Konvergenz.

(b) Sei $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} =$ Borel σ-Algebra auf $[0,1]$, $\mathbb{P} =$ Lebesgue Maß. Zeigen Sie: Die Folge

$$\begin{aligned}&X_1 = \mathbb{1}_{[0,1/2]}, X_2 = \mathbb{1}_{[1/2,1]},\\ &X_3 = \mathbb{1}_{[0,1/4]}, X_4 = \mathbb{1}_{[1/4,1/2]}, X_5 = \mathbb{1}_{[1/2,3/4]}, X_6 = \mathbb{1}_{[3/4,1]},\\ &X_7 = \mathbb{1}_{[0,1/8]}, X_8 = \mathbb{1}_{[1/8,1/4]}, \ldots\end{aligned}$$

konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen 0, aber sie hat keinen fast sicheren Grenzwert. Geben Sie eine fast sicher konvergente Teilfolge von $X_1, X_2, \ldots$ an.

(c) Zeigen Sie: Konvergiert eine monoton fallende Folge von nicht-negativen Zufallsvariablen gegen 0 in Wahrscheinlichkeit, so konvergiert sie sogar fast sicher gegen 0. Dabei bedeutet "monoton fallend", dass $X_1(\omega) \geq X_2(\omega) \geq X_3(\omega) \geq \ldots \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Für zwei Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ definiere

$$d(X,Y) := \mathbb{E}[\min\{|X-Y|, 1\}].$$

(Der Erwartungswert ist wohldefiniert, denn $0 \leq \min\{|X-Y|,1\} \leq 1$). Zeigen Sie:

(i) $d(X,Y) = 0$ genau dann, wenn $X = Y$ fast sicher.

(ii) $d(X,Y) = d(Y,X)$ für beliebige Zufallsvariablen X, Y.

(iii) $d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$ für beliebige Zufallsvariablen X, Y, Z.

(iv) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} d(X_n, X) = 0$.

Somit ist d eine Metrik auf der Menge aller Zufallsvariablen (wobei fast überall gleiche Zufallsvariablen identifiziert werden), welche die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit metrisiert.

Aufgabe 3 (1+4 Punkte)

Eine Folge $X_1, X_2, \ldots$ von Zufallsvariablen heißt straff (oder beschränkt in Wahrscheinlichkeit), falls

$$\lim_{a\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}[|X_n| > a] = 0.$$

Zeigen Sie:

(a) Sind $X_1, X_2, \ldots$ und $Y_1, Y_2, \ldots$ straffe Folgen, so ist auch die Folge $X_n + Y_n$ straff.

(b) Ist $X_1, X_2, \ldots$ straffe Folge und $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$, so gilt auch $X_n Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$.