Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hendrik Flasche

Sommersemester 2016
30. Mai 2016

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 6

Abgabe: 06. Juni 2016

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Seien $N, X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen mit folgenden Eigenschaften:

- N nimmt Werte in $\{0, 1, 2, \ldots\}$ an, $X_1, X_2, \ldots$ sind reellwertig.
- $N, X_1, X_2, \ldots$ sind unabhängig.
- $X_1, X_2, \ldots$ sind identisch verteilt.

Definiere $S = X_1 + \ldots + X_N$.

(a) Zeigen Sie, dass für die charakteristische Funktion von S die Formel

$$\varphi_S(t) = g_N(\varphi_{X_1}(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

gilt. Dabei sei $g_N(z) = \mathbb{E}[z^N]$, $|z| \leq 1$, die erzeugende Funktion von N und $\varphi_{X_1}(t) = \mathbb{E}[e^{itX_1}]$, $t \in \mathbb{R}$, die charakteristische Funktion von X_1.

(b) Zeigen Sie, dass falls $\mathbb{E}[N] < \infty$ und $\mathbb{E}[X_1] < \infty$ gilt

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X_1].$$

Zeigen Sie weiter, dass falls $\mathbb{E}[N^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ gilt

$$\operatorname{Var} S = \mathbb{E}[N] \cdot \operatorname{Var} X_1 + (\mathbb{E}[X_1])^2 \cdot \operatorname{Var} N.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

In einem Münzwurf (mit Wahrscheinlichkeit von Kopf p und Wahrscheinlichkeit von Zahl $q = 1-p$) sei A das Ereignis, dass der erste „Run“ der Länge (mindestens) k aus lauter Köpfen vor dem ersten „Run“ der Länge (mindestens) l aus lauter Zahlen eintritt. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}[A] = \frac{qp^k/(1-p^k)}{qp^k/(1-p^k) + pq^l/(1-q^l)}.$$

Ein „Run“ sei hier ein Aufeinanderfolgen gleicher Ergebnisse wie etwa $ZZZZ$ oder $KKKK$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Betrachten Sie einen Galton–Watson–Prozess $Z_0, Z_1, \ldots$ mit Nachkommensverteilung $p_0, p_1, \ldots$. Sei $\mu := \mathbb{E}Z_1 = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k$ die erwartete Anzahl der Nachkommen und $\sigma^2 = \operatorname{Var} Z_1 = \sum_{k=1}^{\infty} p_k k^2 - \mu^2$ die Varianz der Nachkommenzahl eines Teilchens. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Var} Z_n = \begin{cases} \frac{\sigma^2 \mu^{n-1}(\mu^n - 1)}{\mu - 1}, & \text{falls } \mu \neq 1, \\ n\sigma^2, & \text{falls } \mu = 1. \end{cases}$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

In einer Telefonzentrale sind $k \in \mathbb{N}$ Sachbearbeiter beschäftigt. Pro Stunde kommen in der Zentrale $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ Anrufe an, $\lambda > 0$. Ein Anruf wird mit Wahrscheinlichkeit p_i an den i-ten Sachbearbeiter weitergeleitet, wobei $p_i \in (0,1)$ und $p_1 + ... + p_k = 1$. Die Weiterleitung eines Anrufes geschieht unabhängig von der Anzahl N der Anrufe und unabhängig von der Weiterleitung aller anderen Anrufe. Sei N_i die Anzahl der bei Sachbearbeiter i pro Stunde antreffenden Anrufe, $i = 1, ..., k$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $i = 1, ..., k$ die Zufallsvariable N_i Poisson-verteilt mit Parameter $p_i\lambda$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen $N_1, \ldots, N_k$ unabhängig sind.

Aufgabe 5 ($2 + 3$ Bonuspunkte)

10 Gefangenen $G1, G2, \ldots, G10$ wird Folgendes mitgeteilt: Am nächsten Tag sollen die Gefangenen in einer Reihe aufgestellt werden, so dass $G1$ die Gefangenen $2, 3, ..., 10$ sieht, $G2$ die Gefangenen $3, 4, \ldots, 10$ sieht, usw. Der 10. Gefangene sieht niemanden. Jedem Gefangenen wird ein Hut aufgesetzt, der eine der beiden Farben „schwarz“ oder „weiß“ haben kann. Dabei sieht kein Gefangener seinen eigenen Hut, sondern nur die Hüte der Personen, die vor ihm stehen. Danach soll jeder Gefangene (angefangen mit $G1$) die Farbe seines Hutes raten. Jeder, der die Farbe seines Hutes raten kann, wird freigelassen. In der Nacht dürfen die Gefangenen ihre Strategie absprechen.

(a) Geben Sie eine Strategie an, mit der alle Gefangenen bis auf maximal einen gerettet werden können.

(b) Nun betrachte man eine ähnliche Aufgabe mit unendlich vielen Gefangenen $G1, G2, \ldots$. Geben Sie eine Strategie an, mit der alle Gefangenen bis auf möglicherweise $G1$ gerettet werden können. (In diesem Aufgabenteil wird vorausgesetzt, dass die Gefangenen sich unendlich viele reelle Zahlen merken können).