Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hendrik Flasche

Sommersemester 2016
24. Mai 2016

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 5

Abgabe: 30. Mai 2016

Aufgabe 1 (2+3 Punkte)

Ein fairer Würfel wird mehrfach geworfen. Es sei X_n die Anzahl der verschiedenen Augenzahlen, die in den Würfen $1, \dots, n$ beobachtet wurden. Für die Würfe $3, 5, 3, 1, 4, 6, 6, 2, \dots$ beispielsweise lauten die Realisierungen $X_1 = 1$, $X_2 = 2$, $X_3 = 2$, $X_4 = 3$, $X_5 = 4$, $X_6 = 5$, $X_7 = 5$ und $X_k = 6$ für $k \geq 8$.

(a) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix der Markow-Kette X_n und zeigen Sie, dass 6 ein absorbierender Zustand ist.

(b) Sei $N = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = 6\}$ die erste Zeit, zu der alle 6 Augenzahlen beobachtet wurden. Bestimmen Sie $\mathbb{E}N$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Ein fairer Würfel wird solange geworfen, bis entweder nacheinander 3 gleiche oder nacheinander 3 verschiedene Würfe gelingen. Zeigen Sie: die Wahrscheinlichkeit, dass der Fall gleicher Würfe zuerst eintritt, beträgt 1/15.

Hinweis: Ein Modell mit 5 verschiedenen Zuständen reicht aus.

Aufgabe 3 (2+3 Punkte)

Seien $\xi_1, \xi_2, \dots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[\xi_1 = 1] = \mathbb{P}[\xi_1 = -1] = 1/2$. Betrachten Sie die einfache symmetrische Irrfahrt $X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, die in $X_0 = 0$ startet.

(a) Sei
$$T := \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = -a \text{ oder } X_n = b\}$$
die Austrittszeit aus dem Intervall $(-a, b)$, wobei $a, b \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}T$.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert des Zeitpunktes N_k, an dem die Irrfahrt zum ersten Mal genau k verschiedene Punkte besucht hat, d.h.
$$N_k = \min\{n \in \mathbb{N}_0 \colon \text{unter den Zahlen } X_0, \dots, X_n \text{ gibt es genau } k \text{ verschiedene}\}.$$
Hinweis: Zeigen Sie mit (a), dass $\mathbb{E}[N_{k+1} - N_k] = k - 1$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es werden Bernoulli-Experimente mit Erfolgswahrscheinlichkeit p solange durchgeführt, bis man eine Serie aus k Erfolgen hintereinander beobachtet hat. Es sei T die Anzahl der Experimente, die dafür nötig sind. Zeigen Sie, dass
$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{(1-p)p^k} - \frac{1}{1-p}.$$