Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hendrik Flasche

Sommersemester 2016
09. Mai 2016

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 4

Abgabe: 23. Mai 2016

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte)

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $(\lambda_i)_{i\in E}$ auf dem Zustandsraum E einer Markov-Kette mit Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j\in E}$ heißt reversibel, falls $\lambda_i p_{ij} = \lambda_j p_{ji}$ für alle $i, j \in E$.

(a) Zeigen Sie, dass ein reversibles Wahrscheinlichkeitsmaß invariant ist.

(b) Zeigen Sie, dass für die Ehrenfest-Kette mit D Bällen in zwei Urnen das Wahrscheinlichkeitsmaß $\lambda_k = 2^{-D}\binom{D}{k}$, $k = 0, 1, \ldots, D$ reversibel ist.

(c) Zeigen Sie, dass für die Irrfahrt auf einem Graphen (E, K) das Wahrscheinlichkeitsmaß $\lambda_i = d_i / \sum_{j\in E} d_j$, $i \in E$, reversibel ist, wobei $d_i = \#\{j \in E : (i, j) \in K\}$ der Grad der Ecke i ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Nach dem Gesetz der großen Zahlen gilt für eine irreduzible und positiv rekurrente Markow–Kette mit beliebiger Anfangsverteilung und invariantem Wahrscheinlichkeitsmaß $(\lambda_i)_{i\in E}$, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k=i\}} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \lambda_i, \quad i \in E.$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}[X_k = i] = \lambda_i.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Ein fairer Würfel wird unendlich oft geworfen. Sei S_n die Augensumme der ersten n Würfe. Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[S_n \text{ ist ohne Rest durch 7 teilbar}].$$

Hinweis: Betrachten Sie (S_n mod 7) als Markow-Kette.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Betrachten Sie eine Markow-Kette auf dem Zustandsraum $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$ mit den Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = 1 - p$ für $i = 1, 2, \ldots$ und $p_{0,1} = p$, $p_{0,0} = 1 - p$. Dabei sei $p \in (0, 1)$.

(a) Zeigen Sie, dass diese Kette für $p \leq 1/2$ rekurrent und für $p > 1/2$ transient ist.

(b) Zeigen Sie, dass diese Kette für $p < 1/2$ positiv rekurrent und für $p = 1/2$ null rekurrent ist. Berechnen Sie für den Fall positiver Rekurrenz das eindeutige invariante Wahrscheinlichkeitsmaß.