Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hendrik Flasche

Sommersemester 2016
02. Mai 2016

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 3

Abgabe: 09. Mai 2016

Aufgabe 1 (2+3 Punkte)

Eine Fliege vollführt eine Irrfahrt auf den Eckpunkten eines Würfels. In jedem (diskreten) Zeitschritt verbleibt sie mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/4$ an ihrer aktuellen Position oder sie fliegt zu einem benachbarten Eckpunkt, welche sie unter allen benachbarten Eckpunkten mit gleicher Wahrscheinlichkeit auswählt. Seien A und B zwei diagonal gegenüberliegende Eckpunkte des Würfels. Angenommen, die Fliege starte in A.

(a) Berechnen Sie die erwartete Anzahl von Zeitschritten bis zu einer ersten Rückkehr der Fliege nach A.

(b) Berechnen Sie die erwartete Anzahl von Besuchen in B bevor die Fliege das erste Mal wieder in A landet.

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)

Ein fairer Würfel wird unendlich oft gewürfelt. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne X_n die Anzahl der Würfe seit der letzten Sechs. Weiterhin sei $X_0 = 0$ gesetzt.

(a) Geben Sie die Übergangsmatrix der Markow-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ an.

(b) Zeigen Sie, dass diese Markow-Kette irreduzibel und rekurrent ist.

Beispiel: Wird $5, 5, 6, 1, 3, 4, 6, 6, 2, 2, 5, \ldots$ gewürfelt, so lautet die zu $(X_0, X_1, X_2, \ldots)$ gehörige Realisierung $(0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Man betrachte eine (möglicherweise reduzible oder periodische) Markow–Kette mit einem endlichen Zustandsraum E. Angenommen, die Grenzwerte

$$\lambda_j := \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n = j]$$

existieren für alle $j \in E$. Zeigen Sie, dass $(\lambda_j)_{j\in E}$ ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben seien der Zustandsraum $E := \mathbb{Z}$ sowie die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{i,i+1} = p, \quad p_{i,i-1} = 1 - p, \quad i \in \mathbb{Z},$$

wobei $0 < p < 1$ ein Parameter ist. Bestimmen Sie alle invarianten Maße dieser Markow–Kette, die auch die einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ genannt wird.

Hinweis: Eine Fallunterscheidung $p = 1/2$ und $p \neq 1/2$ ist sinnvoll.