Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hendrik Flasche

Sommersemester 2016
25. April 2016

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 2

Abgabe: 02. Mai 2016

Aufgabe 1 (2+3 Punkte)

Betrachten Sie eine Markow-Kette mit Zustandsraum $E = \{1, \dots, 5\}$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Beschreiben Sie die Kommunikationsklassen dieser Markow-Kette.

(b) Welche Klassen sind abgeschlossen, aperiodisch, rekurrent?

Bitte geben Sie eine möglichst vollständige Begründung. (Um zu begründen, dass j aus i erreichbar ist, können Sie einen expliziten Weg von i nach j angeben).

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)

Ein fairer Würfel werde unendlich oft geworfen. Es seien $Z_0, Z_1, Z_2, \dots$ die Augenzahlen (der erste Wurf finde zum Zeitpunkt 0 statt) und $M_n := \max\{Z_0, \dots, Z_n\}$ die maximale Augenzahl in den Würfen $0, \dots, n$, wobei $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $Z_0, Z_1, \dots$ eine Markow-Kette auf $E = \{1, \dots, 6\}$ ist und berechnen Sie deren Anfangsverteilung und Übergangsmatrix.

(b) Zeigen Sie, dass $M_0, M_1, \dots$ eine Markow-Kette auf $E = \{1, \dots, 6\}$ ist und berechnen Sie deren Anfangsverteilung und Übergangsmatrix.

Hinweis: Um zu zeigen, dass eine Folge von Zufallsvariablen $X_0, X_1, \dots$ eine Markow-Kette bildet, kann man die Wahrscheinlichkeiten der Form $\mathbb{P}[X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n]$ berechnen.

Aufgabe 3 (1+2+2 Punkte)

Betrachten Sie eine Markow-Kette mit dem Zustandsraum $E = \{1, 2, \dots\}$ und den folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten. Befindet sich die Markow-Kette in einem Zustand $i \in E$, so geht sie zu $i + 1$ mit Wahrscheinlichkeit $i/(i + 1)$ oder zu 1 mit Wahrscheinlichkeit $1/(i + 1)$. Der Startzustand sei $X_0 = 1$. Sei $T = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = 1\} \in \{1, 2, \dots, +\infty\}$ die erste Rückkehrzeit zu Zustand 1.

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{P}[T > k]$, $\mathbb{P}[T = k]$ (insbesondere, $\mathbb{P}[T = +\infty]$) und $\mathbb{E}T$.

(b) Ist diese Kette irreduzibel? Ist sie rekurrent?

(c) Bestimmen Sie alle invarianten Maße dieser Kette. (Gemeint sind nicht nur die WMaße).

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Man betrachte zwei Schachteln. Zum Zeitpunkt 0 gibt es k weiße Bälle in der ersten und k schwarze Bälle in der zweiten Schachtel. In jeder Runde zieht man jeweils einen Ball aus jeder Schachtel, wobei alle in Frage kommenden Bälle gleichwahrscheinlich seien. Dann vertauscht man die Bälle (d.h. der Ball aus der ersten Schachtel wird in die zweite gelegt, während der Ball aus der zweiten Schachtel in die erste gelegt wird). Danach wird das Ganze wiederholt. Sei X_n die Anzahl der weißen Bälle in der ersten Schachtel zum Zeitpunkt n. Bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten und alle invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße dieser Markow-Kette.