Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hendrik Flasche

Sommersemester 2016
11. Juli 2016

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 12

Abgabe: 18. Juli 2016

Aufgabe 1 (5 Bonuspunkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein WRaum und $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ eine Teil-σ-Algebra. Für eine quadratisch integrierbare Zufallsvariable X definiert man die bedingte Varianz von X gegeben $\mathcal{B}$ wie folgt:

$$\operatorname{Var}[X|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{B}])^2|\mathcal{B}].$$

Die bedingte Varianz ist eine Zufallsvariable. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{Var}[X|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[X^2|\mathcal{B}] - (\mathbb{E}[X|\mathcal{B}])^2$.

(b) $\operatorname{Var}[X] = \mathbb{E}[\operatorname{Var}[X|\mathcal{B}]] + \operatorname{Var}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]]$.

Aufgabe 2 (5 Bonuspunkte)

Man betrachte das folgende zweistufige Experiment. Zuerst simuliert man eine Zufallsvariable U mit Werten in $[0, 1]$. Danach führt man n Bernoulli-Experimente mit Erfolgswahrscheinlichkeit U durch. Es sei N die Anzahl der Erfolge. Es seien $\mu := \mathbb{E}U$ und $\sigma^2 := \operatorname{Var} U$ bekannt. Bestimmen Sie $\mathbb{E}N$ und $\operatorname{Var} N$.

Hinweis: Die Verteilung von N ist gegeben durch

$$\mathbb{P}[N = k] = \int_0^1 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\ P_U(\mathrm{d}p), \quad k = 0, \ldots, n,$$

wobei P_U die Verteilung von U ist, d.h. $P_U[B] = \mathbb{P}[U \in B]$ für alle Borel–Mengen $B \subset \mathbb{R}$. Beachten Sie, dass N im Allgemeinen nicht binomialverteilt ist!

Aufgabe 3 (5 Bonuspunkte)

Sei $X_0, X_1, \ldots,$ eine Markow-Kette mit Übergangswahrscheinlichkeiten $(p_{ij})_{i,j \in E}$, startend in einer invarianten Wahrscheinlichkeitsverteilung $\lambda = (\lambda_i)_{i \in E}$.

Wir setzen $Y_0 := X_n, Y_1 := X_{n-1}, \ldots, Y_n := X_0$. Zeigen Sie: $Y_0, \ldots, Y_n$ bilden einen endlichen Abschnitt einer Markow-Kette mit Übergangswahrscheinlichkeiten $q_{ji} = \lambda_i p_{ij}/\lambda_j$ und invarianter Wahrscheinlichkeitsverteilung λ.

Aufgabe 4 (5 Bonuspunkte)

Bei einem fairen Würfel seien drei Seiten rot, zwei Seiten grün und eine Seite schwarz eingefärbt. Wie groß ist die erwartete Anzahl von Würfen, bis (i) die Farbe schwarz; (ii) alle drei Farben mindestens einmal gefallen sind?

Aufgabe 5 (5 Bonuspunkte)

Zwei Basketballspieler A und B werfen den Ball auf einen Korb. Spieler A beginnt. A trifft bei jedem Wurf mit Wahrscheinlichkeit $p \neq 0$, B trifft mit Wahrscheinlichkeit $q \neq 0$. Es gewinnt derjenige, der als erster getroffen hat, danach ist das Spiel zu Ende.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt.

(b) Bestimmen Sie die erwartete Spieldauer.