Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hendrik Flasche

Sommersemester 2016
04. Juli 2016

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 11

Abgabe: 11. Juli 2016

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Seien $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$ und $X' \sim N_d(\mu', \Sigma')$ zwei unabhängige d-dimensionale Gauß-verteilte Vektoren. Zeigen Sie, dass $X + X'$ ebenfalls Gauß-verteilt ist.

Hinweis: Sie können benutzen, dass auch eine d-dimensionale Verteilung durch ihre charakteristische Funktion eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es seien X_1 und X_2 zwei unabhängige Zufallsvariablen, die gleichverteilt auf $\{1, \ldots, N\}$ sind. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[\max\{X_1, X_2\}|X_1 + X_2]$, d.h. den besten Vorhersager von $\max\{X_1, X_2\}$ gegeben den Wert von $X_1 + X_2$.

Aufgabe 3 (1+1+1+2 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}|X| < \infty$, und $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ eine Teil-σ-Algebra.

(a) Zeigen Sie: $\mathbb{E}[X|\{\varnothing, \Omega\}] = \mathbb{E}X$ f.s. und $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = X$ f.s.

(b) Zeigen Sie: Ist die Zufallsvariable X unabhängig von der σ-Algebra $\mathcal{B}$, so gilt $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] = \mathbb{E}X$.

(c) Zeigen Sie: Für den bedingten Erwartungswert $Z := \mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ gilt sogar

$$\mathbb{E}[ZY] = \mathbb{E}[XY]$$

für jede beschränkte, $\mathcal{B}$-messbare Zufallsvariable Y. Dabei heißt die Zufallsvariable Y beschränkt, wenn es ein deterministisches (endliches) M mit $\mathbb{P}[|Y| < M] = 1$ gibt.

(d) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X_1|X_1 + \ldots + X_n]$.

Aufgabe 4 (2+3 Punkte)

Angenommen man beobachtet die Werte von n unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit einer unbekannten Verteilungsfunktion F. Man kann F durch die sogenannte empirische Verteilungsfunktion

$$\hat{F}_n(t) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k \le t\}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

schätzen. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt $\hat{F}_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} F(t)$.

(b) Für alle $t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{R}$ konvergiert der Vektor

$$\left(\sqrt{n}(\hat{F}_n(t_1) - F(t_1)), \ldots, \sqrt{n}(\hat{F}_n(t_d) - F(t_d))\right)$$

in Verteilung gegen einen Grenzwertvektor Z. Bestimmen Sie die Verteilung von Z.