Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hendrik Flasche

Sommersemester 2016
27. Juni 2016

Wahrscheinlichkeitstheorie

Übungsblatt 10

Abgabe: 04. Juli 2016

Aufgabe 1 (1+2+2 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und Bernoulli-verteilt mit $\mathbb{P}[X_n = 1] = p_n \in [0,1]$ und $\mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - p_n$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ fast sicher genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$.

(b) Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[X_n = \pm 1] = 1/2$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ fast sicher genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

(c) Es gibt unabhängige Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ mit $\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2 = \ldots = \infty$ so, dass $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ fast sicher konvergiert.

Hinweise. (a): Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ besteht aus Nullen und Einsen. (b): Schwierig ist die Richtung "$\Rightarrow$". Benutzen Sie den Dreireihensatz von Kolmogorow. (c): Wählen Sie X_n so, dass $\mathbb{P}[X_n \neq 0] = 1/2^n$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit X_k gleichverteilt auf dem Intervall $[0, k]$ für alle $k = 1, 2, \ldots$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{4\sum_{k=1}^{n} X_k - n^2}{n^{3/2}}$$

in Verteilung konvergiert und bestimmen Sie die Grenzwertverteilung.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}[X_n = n] = \mathbb{P}[X_n = -n] = \frac{1}{2n^2}, \quad \mathbb{P}[X_n = 1] = \mathbb{P}[X_n = -1] = \frac{1 - n^{-2}}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Var} S_n}{n} = 2.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \ldots$ mit $Y_n = \mathbb{1}_{X_n > 0} - \mathbb{1}_{X_n < 0}$. Zeigen Sie, dass $Y_1, Y_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt sind mit

$$\mathbb{P}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{X_n \neq Y_n} < \infty\right] = 1.$$

Bemerkung: Die Lindeberg–Bedingung ist für das Dreiecksschema $X_{n,k} := X_k / \sqrt{\operatorname{Var} S_n}$ ($k = 1, \ldots, n$) nicht erfüllt. Wäre sie erfüllt, so müsste $S_n/(\sqrt{2n})$ in Verteilung gegen $N(0,1)$ konvergieren.

Aufgabe 4 (1+2+2 Punkte)

(a) Seien $Y_1, Y_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}Y_1 = \mu$, $\sigma^2 := \operatorname{Var} Y_1 < \infty$. Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[Y_1 + \ldots + Y_n \leq an]$$

für $a < \mu$, $a = \mu$ und $a > \mu$.

(b) Betrachten Sie die Folge von Mengen $D_1, D_2, \ldots$ mit

$$D_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon 0 \leq x_1 \leq 1, \ldots, 0 \leq x_n \leq 1, x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq n/3\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(D_n)$, wobei λ_n das n-dimensionale Lebesgue-Maß (Volumen) bezeichnet.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative Borel-Funktion mit $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = 1$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x)\mathrm{d}x < \infty$. Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int \cdots \int}_{x_1^2+\ldots+x_n^2 \leq an} \left(f(x_1) \cdot \ldots \cdot f(x_n)\right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

in Abhängigkeit vom Parameter $a > 0$.

Hinweise. (a): Gesetz der großen Zahlen ist hilfreich, reicht aber im Fall $a = \mu$ nicht aus. (b) und (c): es gibt jeweils eine stochastische Interpretation.