Aufgabe 71 Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabh. ZV mit $X_n \sim N(0,1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ konvergiert f.s. $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

Lösung: "$\Longleftarrow$": Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$. Z.z.: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ konvergiert f.s.

Es gilt
$$\left.\begin{aligned} \mathbb{E}[a_n X_n] &= a_n \mathbb{E} X_n = a_n \cdot 0 = 0 \\ \operatorname{Var}[a_n X_n] &= \mathbb{E}[a_n^2 X_n^2] = a_n^2 \mathbb{E}[X_n^2] = a_n^2 \cdot 1 = a_n^2 \end{aligned}\right\} \text{denn } X_n \sim N(0,1).$$

Es folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var}(a_n X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

Somit kann man Satz 1.21 aus der Aufgabensammlung verwenden.

"$\Longrightarrow$" Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ konvergent f.s. Z.z. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ konvergiert f.s. $\Longrightarrow$ die Folge der Partialsummen

$$S_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k X_k, \quad n = 1, 2, \ldots$$

konvergiert f.s. gegen eine ZV S

$\Longrightarrow$ die Folge $S_1, S_2, \ldots$ konvergiert in Verteilung gegen S

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi_{S_n}(t) = \varphi_S(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ ($\varphi_{S_n} = \mathbb{E} e^{itS_n}$ ist die char. Fkt von S_n)

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi_{a_1X_1}(t) \cdot \ldots \cdot \varphi_{a_nX_n}(t) = \varphi_S(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{2}a_1^2t^2} e^{-\frac{1}{2}a_2^2t^2} \cdot \ldots \cdot e^{-\frac{1}{2}a_n^2t^2} = \varphi_S(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

denn $a_nX_n \sim N(0, a_n^2)$

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2(a_1^2 + \ldots + a_n^2)} = \varphi_S(t)$.

Sei nun $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ eine Zahl mit $\varphi_S(t) \neq 0$ [Eine solche Zahl existiert, denn φ_S ist stetig und somit $\lim_{t\to 0} \varphi_S(t) = 1$].

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2}t^2(a_1^2 + \ldots + a_n^2) = \log \varphi_S(t) \neq \infty$ denn $\varphi_S(t) \neq 0$

og:

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_1^2 + \ldots + a_n^2) = -\frac{2}{t^2} \log \varphi_S(t) \neq +\infty \qquad \square$$