Übungen

Abgabetermin: Donnerstag 25.6., 12:15 Uhr, Briefkasten 146

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Zeigen Sie $\mathbb{E}U \log U = -\frac{1}{4}$, falls $U \stackrel{d}{=} \mathit{Unif}(0,1)$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Gegeben sei die Situation aus Lemma 5.62. Beweisen Sie, dass die Konvergenz von $g_n(\lceil nt \rceil])$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $(0,1)$ ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Benutzen Sie (5.68) und die Beschränktheit von $a_n = \ell_2(F_n, F)$, um $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ zu zeigen.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Gegeben sei die homogene Version der *Quicksort*-Gleichung, d.h.

$$X \stackrel{d}{=} UX_1 + (1-U)X_2, \quad U \stackrel{d}{=} \mathit{Unif}(0,1). \tag{0.1}$$

Beweisen Sie

a) Jede Cauchy-Verteilung $\mathit{Cauchy}(a,b)$, $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_>$, bildet eine Lösung von (0.1).
Hinweis: Die $\lambda\!\!\lambda$-Dichte einer $\mathit{Cauchy}(a,b)$-Verteilung lautet

$$g_{a,b}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{(x-a)^2 + b^2}.$$

b) Sei F eine Lösung von (0.1). Dann bildet die Faltung von F mit einer Cauchy-Verteilung wieder eine Lösung der Gleichung.

c) Definiere $\mathit{Cauchy}(a,0) := \delta_a$, $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Aussagen in a) und b) für diese Verteilungen richtig bleiben.