Übungen

Abgabetermin: Donnerstag 18.6., 12:15 Uhr, Briefkasten 146

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Sei $p \geq 1$ und $F, G \in \mathscr{P}^p(\mathbb{R})$. Beweisen Sie

$$\ell_p(F * H, G * H) \leq \ell_p(F, G) \tag{0.1}$$

für alle $H \in \mathscr{P}^p(\mathbb{R})$. Zeigen Sie außerdem, dass in (0.1) Gleichheit gilt, falls $H = \delta_a$ für ein $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Beweisen Sie Lemma 5.44.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Gegeben sei die Situation auf Lemma 5.50 b). Beweisen Sie

a) $\mathbb{E}\mathscr{S}(F) - \mathbb{E}\mathscr{S}(G) = \mathbb{E}(\sum_{i\geq 1} T_i)(\mathbb{E}F - \mathbb{E}G)$ für alle $F, G \in \mathscr{P}^1(\mathbb{R})$.

b) Sei $(X_n, Y_n)_{n\geq 1}$ eine u.i.v. Folge von (C, T)-unabhängigen ZG mit $(X_1, Y_1) \stackrel{d}{=} (F^0, G^0)$ und $||X_1 - Y_1||_2 = \ell_2(F^0, G^0)$ für $F, G \in \mathscr{P}^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie

$$\ell_2^2(\mathscr{S}(F)^0, \mathscr{S}(G)^0) \leq \Big|\Big|\sum_{i\geq 1} T_i(X_i - Y_i)\Big|\Big|_2^2 + Var\Big(\sum_{i\geq 1} T_i\Big)(\mathbb{E}F - \mathbb{E}G)^2.$$

c) Benutzen Sie die vorigen Aufgabenteile und

$$\ell_2^2(\mathscr{S}(F), \mathscr{S}(G)) = \ell_2^2(\mathscr{S}(F)^0, \mathscr{S}(G)^0) + (\mathbb{E}\mathscr{S}(F) - \mathbb{E}\mathscr{S}(G))^2$$

um einen alternativen Beweis der Ungleichung (5.50) zu führen.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Seien $0 < p < 1$ und $F, G \in \mathscr{P}^p(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass es eine (F, G)-Kopplung (X, Y) gibt derart , dass $\ell_p(F, G) = \|X - Y\|_p$.
Hinweis: Betrachten Sie eine Folge von (F, G)-Kopplungen $(X_n, Y_n)_{n\geq 1}$ mit

$$\|X_n - Y_n\|_p \leq \ell_p(F, G) + \frac{1}{n}$$

für jedes $n \geq 1$. Zeigen Sie dann folgende Aussagen:

(a) Es gibt eine Teilfolge $(X_{n_k}, Y_{n_k})_{k\geq 1}$, die in Verteilung gegen ein (X, Y) konvergiert.

(b) O.E. kann f.s. Konvergenz in (a) angenommen werden.

(c) (X, Y) ist eine (F, G)-Kopplung.

(d) $\|X_{n_k} - X\|_p \to 0$ und $\|Y_{n_k} - Y\|_p \to 0$.

(e) $\ell_p(F, G) = \|X - Y\|_p$.