Übungen

Abgabetermin: Donnerstag 11.6., 12:15 Uhr, Briefkasten 146

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Beweisen Sie Lemma 5.2.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung Lemma 5.3 c)

$$Y_n(v) := C(v) + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{|w|=j} [L(w)]_v C(vw) + \sum_{|w|=k} [L(w)]_v Y_{n-k}(vw)$$

für alle $v \in \mathbb{T}$ und $n \geq k \geq 1$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Gegeben Sie die Situation aus Lemma 5.4. Geben Sie jeweils ein Beispiel für $(T_i)_{i\geq 1}$ mit

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{i\geq 1} |T_i|\Big) = \infty, \quad \mathbb{E}\Big|\sum_{i\geq 1} T_i\Big| < \infty \text{ und } \mathbb{E}\Big(\sum_{i\geq 1} T_i\Big) = 1$$

an, so dass

a) der zu $\mathbf{T}$ assoziierte GVP $\mathbf{Y}$ ein MG bzgl $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ bildet.

b) für den zu $\mathbf{T}$ assoziierte GVP $\mathbf{Y}$ ein $n \geq 1$ existiert mit $\mathbb{E}|Y_n| = \infty$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Sei $(T_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von nicht-negativen ZG und

$$m(\theta) := \mathbb{E}\Big(\sum_{i\geq 1} T_i^{\theta}\Big)$$

für $\theta \in \mathbb{D}_m := \{\theta \geq 0 : m(\theta) < \infty)$. Beweisen Sie

a) Falls $\mathbb{D}_m \neq \emptyset$, so ist $\mathbb{D}_m$ ein Intervall, welches auch nur aus einem Punkt bestehen darf.

b) m ist eine konvexe Funktion auf $\mathbb{D}_m$ und ∞-oft differenzierbar auf dem Inneren von $\mathbb{D}_m$ mit k-facher Ableitung

$$m^{(k)}(\theta) = \mathbb{E}\Big(\sum_{i\geq 1} T_i^\theta \log^k T_i\Big) \quad , k \geq 1,$$

wobei $x^\theta \log^k x := 0$ für $x = 0$.

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Sei $T_i := i^{-1}$ für $i \geq 1$, $C = 0$ und beschreibe $\mathscr{S}$ die zugehörige *smoothing transform*.

a) Setze $\mathscr{P}_0^2(\mathbb{R}) := \{F \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) := \int xF(dx) = 0, \int x^2 F(dx) < \infty\}$. Zeige, dass $\mathscr{S}$ eine Selbstabbildung auf $\mathscr{P}_0^2(\mathbb{R})$ ist.

b) Ist $\mathscr{S}$ auch eine Selbstabbildung auf $\mathscr{P}^2(\mathbb{R})$?