Institut für Mathematische Statistik

Alsmeyer/Buckmann: Stochastische Rekursionsgleichungen
SS 2015, Blatt 6

Übungen

Abgabetermin: Donnerstag 4.6., 12:15 Uhr, Briefkasten 146

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Beweisen Sie Aufgabe 1 c) von Blatt 6 in der korrigierten Version, d.h. mit Gleichheitszeichen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Beweisen Sie die folgende Version des IRT: Sei $M \in (0,\infty]$ und $X \in \overline{\mathbb{R}}\backslash\{0\}$ unabhängige ZG, so dass für ein $\vartheta > 0$

(IRT2-1) $\mathbb{E}|M|^{-\vartheta} = 1$,

(IRT2-2) $\mathbb{E}|M|^{-\vartheta}\log^-|M| < \infty$,

(IRT2-3) Die Verteilung von $\mathbb{P}(\log|M| \in \cdot \mid |M| < \infty)$ nicht-arithmetisch ist, d.h. insbesondere $\mathbb{P}(|M| = 1) < 1$.

Dann ist $0 < \mathbb{E}\log|M| \le \infty$, $0 < \mu_\vartheta := -\mathbb{E}|M|^{-\vartheta}\log|M| < \infty$ und die folgenden Behauptungen gelten: Falls

$$\int_0^\infty \big|\mathbb{P}(X \le t) - \mathbb{P}(MX \le t)\big|\, t^{-1-\vartheta}\, dt \;<\; \infty$$

bzw.

$$\int_0^\infty \big|\mathbb{P}(X \ge -t) - \mathbb{P}(MX \ge -t)\big|\, t^{-1-\vartheta}\, dt \;<\; \infty,$$

dann gilt

$$\lim_{t\to 0} t^{-\vartheta}\,\mathbb{P}(0 < X \le t) \;=\; C_+,$$

bzw.

$$\lim_{t\to 0} t^{\vartheta}\,\mathbb{P}(-t \le X < 0) \;=\; C_-,$$

wobei C_+ und C_- gegeben sind durch

$$\begin{aligned} C_+ \;&:=\; \frac{1}{\mu_\vartheta}\int_0^\infty \big(\mathbb{P}(X \le t) - \mathbb{P}(MX \le t)\big)\, t^{-1-\vartheta}\, dt, \\ C_- \;&:=\; \frac{1}{\mu_\vartheta}\int_0^\infty \big(\mathbb{P}(X \ge -t) - \mathbb{P}(MX \ge -t)\big)\, t^{-1-\vartheta}\, dt. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Gegeben seien die Voraussetzungen wie in Lemma 4.14. Beweisen Sie

$$\int_0^\infty |\mathbb{P}(X > t) - \mathbb{P}(\Pi_\sigma X > t)| t^{\vartheta-1} dt < \infty.$$

Aufgabe 4 (*AR(1) Modell mit ARCH(1) Fehlern*) (12 Punkte)
Gegeben sei das Modell aus (1.39), d.h.

$$X_n = \alpha X_{n-1} + (\beta + \lambda X_{n-1}^2)^{1/2} \epsilon_n, \tag{0.1}$$

wobei $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ eine u.i.v. Folge von *Normal*$(0,1)$-verteilten ZG bezeichnet, die unabhängig von X_0 ist. Ferner seien $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta, \lambda \in \mathbb{R}_>$ und $\alpha^2 + \lambda < 1/2$.

a) Beweisen Sie, dass das zugehörige IFS *strongly mean contractive* der Ordnung 2 ist und die Sprungbedingung (3.17) erfüllt ist. Leiten Sie daraus die Existenz einerVerteilung π her, die den eindeutigen stochastischen Fixpunkt von (0.1) bildet.

b) Setze $Y_0 = |X_0|$ und

$$Y_n = |\alpha Y_{n-1} + (\beta + \lambda Y_{n-1}^2)^{1/2} \epsilon_n|,$$

wobei $X_0 \stackrel{d}{=} \pi$. Beweisen Sie $Y_n \stackrel{d}{=} |X_n|$, $n \geq 0$ und folgern Sie, dass Y_n in Verteilung gegen eine nicht-negative ZG Y konvergiert, die

$$Y \stackrel{d}{=} \left|\alpha Y + (\beta + \lambda Y^2)^{1/2} \epsilon\right|$$

erfüllt.
Hinweis: Ohne Beweis dürfen Sie benutzen, dass π eine symmetrische Verteilung ist.

d) Beweisen Sie, dass ein eindeutiges $\kappa > 0$ existiert mit

$$\mathbb{E}\left|\alpha + \sqrt{\lambda}\,\epsilon\right|^\kappa = 1.$$

e) Beweisen Sie

$$\lim_{t\to\infty} t^\kappa \mathbb{P}(Y > t) = C,$$

und geben Sie eine (implizite) Darstellung von C.
Hinweis: Benutzen Sie die Abschätzung $||a|^\kappa - |b|^\kappa| \leq |a - b|\kappa \max\{|a|^{\kappa-1}, |b|^{\kappa-1}\}$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$. Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $\mathbb{E}|X|^{\kappa-1} < \infty$ für das κ aus d) gilt.

Aufgabe 5 (5 Bonuspunkte)
Gegeben sei ein AR(1)-Modell mit ARCH(1) Fehlern (wie in Aufgabe 4) mit $X_0 = 0, \varepsilon_i \sim$ *Normal*$(0,1)$ und Parametern $\beta = 0.9, \alpha = 0.4$ und $\lambda = 0.8$. Da $\mathbb{P}(X_n > t) \simeq t^{-\kappa} \cdot C$ für große n und t und bestimmte Konstanten κ und C, können wir letztere durch Simulation schätzen. Wähle dafür $t \geq 5$ und $n = 10000$. Simuliere $X_1, \ldots, X_n$ und die empirische *Tail*-Funktion

$$\widehat{F}_n(t) = \frac{1}{n} \cdot |\{i \in \{1, \ldots, n\} : X_i > t\}|.$$

Die Asymptotik $\mathbb{P}(X_n > t) \simeq t^{-\kappa} \cdot C$ lässt sich in ein lineares Regressionsmodell

$$\log \widehat{F}_n(t) \simeq -\kappa \log t + C$$

für große t übersetzen. Schätzen Sie κ und C mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate.