**Übungen**

Abgabetermin: Donnerstag 21.5., 12:15 Uhr, Briefkasten 146

**Aufgabe 1** (10 Punkte)
Seien $X$ und $Y$ ZG und $\vartheta > 0$. Beweisen Sie:

a)
$$\int_0^\infty \left|\mathbb{P}(X > t) - \mathbb{P}(Y > t)\right| t^{\vartheta-1} dt \leq \frac{1}{\vartheta}\mathbb{E}\left|(X^+)^\vartheta - (Y^+)^\vartheta\right|. \tag{*}$$

b) Falls die rechte Seite von (*) endlich ist, so gilt
$$\int_0^\infty \left(\mathbb{P}(X > t) - \mathbb{P}(Y > t)\right) t^{\vartheta-1} dt = \frac{1}{\vartheta}\mathbb{E}\left((X^+)^\vartheta - (Y^+)^\vartheta\right).$$

c) Seien $F$, $G$, $F_+$ und $G_+$ die Verteilungsfunktionen von $X$, $Y$, $X^+$ und $Y^+$. Beweisen Sie
$$\int_0^\infty |F(t) - G(t)|\, t^{\vartheta-1} dt \leq \frac{1}{\vartheta}\mathbb{E}\left|F_+^{-1}(U)^\vartheta - G_+^{-1}(U)^\vartheta\right|.$$

**Aufgabe 2** (5 Punkte)
Gegegen sei die Situation aus Unterabschnitt 4.3.2, beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

a) $\mathbb{P}(\sigma - 2 \in \cdot \mid \sigma \geq 2) = Geom(\theta)$ mit $\theta = \mathbb{P}(M \leq 0)$.

b) $\widehat{\mathbb{P}}(\sigma - 2 \in \cdot \mid \sigma \geq 2) = Geom(\hat{\theta})$ mit $\hat{\theta} = \mathbb{E}|M|^\vartheta \mathbf{1}_{\{M<0\}}$, und $\widehat{\mathbb{E}}\sigma = 2$.

c) Die bedingte Verteilung unter $\mathbb{P}$ von $S_\sigma$ gegeben $\Pi_\sigma \neq 0$ erfüllt
$$\mathbb{P}(\Pi_\sigma \neq 0)\mathbb{P}(S_\sigma \in \cdot \mid \Pi_\sigma \neq 0) = pQ_> + \mathbb{P}(M < 0)^2 \sum_{n\geq 0} p^n Q_>^{*n} * Q_<^{*2},$$
wobei $p := \mathbb{P}(M > 0)$, $Q_> := \mathbb{P}(\log M \in \cdot \mid M > 0)$ und $Q_< := \mathbb{P}(\log|M| \in \cdot \mid M < 0)$.

d) Geben Sie die FT von $\mathbb{P}(S_\sigma \in \cdot \mid \Pi_\sigma \neq 0)$ mit der Hilfe der FT von $Q_<, Q_>$ an und zeigen Sie dadurch, dass die Verteilung nicht-arithmetisch ist.

**Aufgabe 3** (5 Punkte)
Beweisen Sie das implizite Erneuerungstheorem für den Fall $M \leq 0$ f.s.