Übungen

Abgabetermin: Freitag, 15.5., 09:15 Uhr, Briefkasten 146

Aufgabe 1 (5 Bonuspunkte)
Simulieren Sie $n = 500$ Schritte eines zufällige-Differenzengleichungen-Models $X_n := M_n X_{n-1} + Q_n$ (Example 3.7) mit Hilfe eines Programmes ihrer Wahl und den Parametern $X_0 = 0$ und

$$(M,Q) = \begin{cases} (2, \frac{1}{2}) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{4} \\ (\frac{1}{2}, 2) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Simulieren Sie ebenso die Rückwärtsiteration $\widehat{X}_0, \ldots, \widehat{X}_n$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von ZV auf einem vollständigen, metrischen Raum $\mathbb{X}$. Beweisen Sie, dass

$$\sum_{n\geq 0} d(X_n, X_{n+1}) < \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

die f.s. Konvergenz von X_n gegen eine ZV X_∞ impliziert. Beweisen Sie ebenso die allgemeinere Aussage, dass

$$\sum_{n\geq 0} a_n d(X_n, X_{n+1}) < \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für eine nicht-fallende Folge positiver Zahlen $(a_n)_{n\geq 0}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n d(X_n, X_\infty) = 0 \quad \mathbb{P}\text{f.s.}$$

impliziert.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Beweisen Sie, dass $C_{\tau(n)}$ (s. (3.25) im Buch) in Verteilung gegen eine ZG C_∞ konvergiert, welche die Verteilungsfunktion

$$\mathbb{P}_x(C_\infty \leq t) = \frac{1}{\mu} \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_x(\sigma_1 > n, C_1 \leq t), \quad t \in \mathbb{R}_>$$

besitzt.
Hinweis: Nutzen Sie das 2. Erneuerungstheorem. Sie dürfen ohne Beweis für einen RW $(S_n)_{n\geq 0}$ die Äquivalenz von $S_n \to \infty$ f.s. und $\mathbb{E}\sigma^>(x) < \infty$ für alle $x \geq 0$ benutzen.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Ein IFS $(X_n)_{n\geq 0}$ von u.i.v. Lipschitz-Funktionen auf $\mathbb{X}$ heißt *geometrically moment contracting* der Ordnung $p > 0$, falls $x_0 \in \mathbb{X}$, $\kappa_p \in \mathbb{R}_>$ und $\rho_p \in (0,1)$ existieren mit

$$\mathbb{E}\, d(\Psi_{n:1}(x_0), \Psi_{n:1}(x))^p \leq \kappa_p d(x_0, x)^p \rho_p^n \text{ für alle } x \in \mathbb{X}, n \in \mathbb{N}. \tag{0.1}$$

Beweisen Sie

a) Gilt (0.1) für ein $x_0 \in \mathbb{X}$, dann gilt für alle $x_1 \in \mathbb{X}$

$$\mathbb{E} d(\Psi_{n:1}(x_1), \Psi_{n:1}(x))^p \leq \kappa(x_1)(d(x_1, x)^p + 1)\rho_p^n \text{ für alle } x \in \mathbb{X}, n \in \mathbb{N}$$

für ein $\kappa(x_1) \in \mathbb{R}_>$.

b) Gilt (0.1) für $p > 0$, dann auch für alle $q \in (0, p)$.

c) Ist $(X_n)_{n\geq 0}$ *strongly mean contractive* der Ordnung p, dann auch *geometrically moment contracting* der Ordnung p.

d) Ist $(X_n)_{n\geq 0}$ *geometrically moment contracting* der Ordnung $p > 0$ und gilt die strengere Sprung-Bedingung (3.20), dann bleiben alle Aussagen von Theorem 3.24 gültig.
Hinweis: Zeigen Sie wie im Beweis von Prop. 3.14 allerdings mittels eines Borel-Cantelli-Arguments, dass $\gamma^n d(\widehat{X}_n, \widehat{X}_{n+1}) \to 0$ $\mathbb{P}$-f.s. für ein $\gamma > 1$.