Übungen

Abgabetermin: Donnerstag 07.05.15, 12:15 Uhr, Briefkasten 146

Aufgabe 1 (*Perpetuities*) (6 Punkte)
Sei $(M_n, Q_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger Kopien von (M,Q) und $\Pi_0 := 1$, $\Pi_n := \prod_{k=1}^n M_k$. Ferner setzen wir voraus:

$$\mathbb{P}(M=0)=0, \mathbb{E}\log|M|<0,\ \mathbb{E}|M|^\theta<\infty \text{ und } \mathbb{E}|Q|^\theta<\infty \text{ für ein } \theta>0.$$

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

a) Es existiert ein $\vartheta \in (0,\theta]$, so dass $\mathbb{E}|M|^\vartheta < 1$.
Hinweis: Betrachte die Funktion $s \mapsto \mathbb{E}|M|^s$ für $s \in [0,\theta]$.

b) Sei $\vartheta \in (0,1]$. Zeigen Sie die Ungleichung $|x+y|^\vartheta \leq |x|^\vartheta + |y|^\vartheta$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

c) $|\Pi_n| \to 0$ a.s. und

$$\left|\sum_{k\geq 1} \Pi_{k-1} Q_k\right| \ \leq\ \sum_{k\geq 1} |\Pi_{k-1} Q_k| \ <\ \infty \quad \text{f.s.}$$

Aufgabe 2 (*Lindley-Prozess*) (5 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhäniger Kopien von X und $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Definiere den zugehörigen Lindley-Prozess

$$W_n = (W_{n-1} + X_n)^+, \quad n \geq 1$$

mit zufälligen, von $(X_n)_{n\geq 1}$ unabhängigen Anfangswert $W_0 \geq 0$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

a) Für alle $n \geq 1$ ist $W_n \stackrel{d}{=} M_{n-1} \vee (W_0 + S_n)$, wobei $M_n := \max_{0\leq k\leq n} S_k$ für $n \geq 0$.

b) Falls $\mathbb{E}X < 0$ ist, gilt $W_n \xrightarrow{d} W_\infty = \max_{k\geq 0} S_k$.

c) Falls $\mathbb{E}X < 0$ ist, so ist die Verteilung von W_∞ die eindeutige Lösung der SFPG

$$W_\infty \stackrel{d}{=} (W_\infty + X)^+$$

in der Klasse der Verteilungen auf $\mathbb{R}_\geq$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass der Übergangskern P eines IFS von u.i.v. Lipschitz-Funktionen, definiert durch
$$P(x, B) = \mathbb{P}_x(\Psi(\theta_1, X_0) \in B), \quad B \in \mathbb{B}(\mathbb{X}),$$
ein Feller-Kern ist, d.h. beschränkte stetige Funktionen auf solche abbildet.

b) Beweisen Sie Lemma 3.3.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ ein IFS von u.i.v. Lipschitz-Funktionen auf einem vollständigen, separablen Raum $\mathbb{X}$ mit Metrik d, das *strongly mean contractive* der Ordnung $p \neq 1$ ist. Zeigen Sie, dass man diese Fälle auf den Fall $p = 1$ zurückführen kann. Beweisen Sie dazu, dass eine vollständige, separable Metrik d' auf $\mathbb{X}$ existiert, die dieselbe Topologie wie d erzeugt und unter der $(X_n)_{n\geq 0}$ *strongly mean contractive* der Ordnung $p = 1$ ist, wenn die Lipschitz-Konstanten bzgl. d' definiert werden.
Hinweis: Untersuchen Sie die Fälle $p > 1$ und $p < 1$ getrennt.