Institut für Mathematische Statistik

Alsmeyer/Buckmann: Stochastische Rekursionsgleichungen
SS 2015, Blatt 2

Übungen

Abgabetermin: Donnerstag 30.4.15, 12:15 Uhr, Briefkasten 146

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ ein RW und τ eine Stopzeit bzgl. der kanonischen Filtration. Beweisen Sie

a) $\mathbb{E}|S_\tau| < \infty, \mathbb{E}|X| < \infty$ und $\mathbb{E}X \neq 0 \Rightarrow \mathbb{E}\tau < \infty$.
Hinweis: Betrachten Sie die zu τ gehörige Kopiensummenfolge und benutzen Sie das Gesetz der großen Zahlen.

b) Im Falle eines EP $(S_n)_{n\geq 0}$ gilt sogar
$$\mathbb{E}S_\tau < \infty \Rightarrow \mathbb{E}X < \infty \text{ und } \mathbb{E}\tau < \infty.$$
Hinweis: Versuchen Sie zunächst die Waldsche Gleichung auf eine beschränkte Stopzeit anzuwenden.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Gegeben sei ein RW $(S_n)_{n\geq 0}$.

a) Beweisen Sie
$$(S_1, \ldots, S_n) \stackrel{d}{=} (S_n - S_{n-1}, S_n - S_{n-2}, \ldots, S_n).$$

b) Setze
$$\begin{aligned} A_{n1} &= \{S_1 \leq S_2, \ldots, S_1 \leq S_n\}, \\ A_{nk} &= \{S_1 > S_k, \ldots, S_{k-1} > S_k, S_k \leq S_{k+1}, \ldots, S_k \leq S_n\} \text{ für } 2 \leq k \leq n-1 \\ \text{und } A_{nn} &= \{S_1 > S_n, \ldots, S_{n-1} > S_n\}. \end{aligned}$$
Zeigen Sie $\mathbb{P}(A_{nk}) = \mathbb{P}(\sigma^{\geq} \geq k)\mathbb{P}(\sigma^{<} > n-k)$ für alle $1 \leq k \leq n$.

c) Zeigen Sie $\mathbb{P}(\sigma^{<} = \infty) - \mathbb{P}(\sigma^{\leq} = \infty) = \kappa\mathbb{P}(\sigma^{<} = \infty)$ mit
$$\kappa = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\sigma^{\leq} = n, S_1^{\leq} = 0).$$

d) Zusätzlich gelte $S_n \to \infty$ f.s. und es bezeichne $\mathbb{U}^{>}$ das Erneuerungsmaß des EP $(S_n^{>})_{n\geq 0}$. Zeigen Sie für $x \geq 0$ die Gültigkeit von
$$\mathbb{P}(|S_{\sigma^{\leqslant}}| \geq x, \sigma^{\leqslant} < \infty) = \int_{(-\infty,-x)} \mathbb{U}^{>}(-x-y)\mathbb{P}^X(dy).$$

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Sei $(S_n)_{n\geq 0}$ ein EP mit positiver Drift μ, Varianz $\sigma^2 := \mathit{Var}\, X \in (0,\infty)$ und Erneuerungsmaß $\mathbb{U}$. Zeigen Sie für den zugehörigen Erneuerungszählprozess $N(t) = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}}$, $t \geq 0$:

a) $\mathbb{E}N(t)^2 = 2\mathbb{U}_1 * \mathbb{U}_1(t) + \mathbb{U}_1(t)$ für alle $t \geq 0$, wobei $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U} - \delta_0$.

b) $\mathit{Var}\, N(t) = \sigma^2 \mu^{-3} t + o(t)$, $t \to \infty$.