Übungen

Abgabetermin: Donnerstag 23.04.15, 12:15 Uhr, Briefkasten 146

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Es sei jeweils Ψ eine Funktion auf $\mathbb{R}_\geq$ und Q ein Maß auf $\mathbb{R}_\geq$ mit $\mu = \int x\, Q(dx)$. Bestimme in den folgenden Fällen ψ, so dass

$$\Psi = \psi + \Psi * Q.$$

a) $\Psi(t) = \frac{t}{\mu}$ und $d(Q) = 0$.

b) $\Psi(t) = \frac{\lfloor t \rfloor}{\mu}$ und $d(Q) = 1$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

a) Seien X und Y unabhängige ZG, $X \stackrel{d}{=} \mathit{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Zeigen Sie

$$\mathbb{P}(X - Y > t | X > Y) = \mathbb{P}(X > t) \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

b) (Typ I-Zähler) Betrachten Sie das folgende Modell für einen Zähler von Teilchen (z.B. Geiger-Zähler): Teilchen erreichen den Zähler gemäß eines homogenen Poisson-Prozesses mit Intensität λ (s. Abschnitt 2.2 im Buch), wobei der Zähler aus technischen Gründen das zweite von zwei emittierten Teilchen nicht registrieren kann, wenn beide fast gleichzeitig ankommen. Nehmen Sie an, dass jedes registrierte Teilchen den Zähler für eine gemäß G verteilte Zeit blockiert, dass ankommende Teilchen während einer Blockierzeit keinen Effekt haben und dass die Blockierzeiten sukzessiver Telchen unabhängig sind und auch unabhängig von dem Poisson-Ankunftsprozess. Begründen Sie mit a), dass die Zeitpunkte, zu denen Teilchen registriert werden, einen EP bilden und geben Sie die Zuwachsverteilung an.

Aufgabe 3 (Typ II-Zähler) (4 Punkte)
Betrachten Sie das Modell aus der vorherigen Aufgabe, jedoch mit dem Unterschied, dass *jedes* am Zähler ankommende Teilchen die aktuelle Blockadezeit neu festsetzt gemäß einer G-verteilten ZG. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $Z(t)$ dafür, dass die Länge einer Blockierperiode den Wert t überschreitet, die Erneuerungsgleichung

$$Z(t) = (1 - G(t))e^{-\lambda t} + \int_0^t Z(t-x)(1 - G(x))\lambda e^{-\lambda x} dx$$

erfüllt.

Aufgabe 4 (6+2* points)
We consider a population of cells having independent lifetimes with a standard exponential distribution. At the end of its lifetime, each cell either splits into two new cells with probability p or dies with probability $1-p$ independent of all other cells alive. Suppose that at time $t=0$ the evolution starts with one cell (ancestor) and let $Z(t)$ be the number of cells alive at time $t \geq 0$. Our goal is to find the expected population size $M(t) = \mathbb{E}Z(t)$ at time t.

a) Show that M satisfies a renewal equation $M = \Psi + M * Q$ [Hint: Use $Z(t) = \mathbf{1}_{\{T>t\}} + \mathbf{1}_{\{T \leq t, Y=2\}}(Z_1(t-T) + Z_2(t-T))$ where T is the lifetime and Y the number of children of the ancestor cell and $Z_i(t-T)$ denotes the size at time t of the subpopulation of cells stemming from the i^{th} daughter cell born at $T \leq t$ $(i = 1, 2)$.]

b) Compute the moment-generating function ϕ_Q of Q and show that there exists a $\theta \in \mathbb{R}$ with $\phi_Q(\theta) = 1$.

c) Show that $\lim_{t\to\infty} e^{-(2p-1)t} M(t) = 1$.

d)* Show that $M(t) = e^{(2p-1)t}$ for all $t \geq 0$.