

Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2015

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 07

19.05.2015

Aufgabe 1:

4 Punkte

Gegeben sei ein arbitragefreies Black-Scholes Modell mit deterministischer zeitabhängiger Volatilität σ und deterministischer zeitabhängiger Zinsrate r . Bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes erfüllt der Aktienpreisprozeß also die Dynamik

$$dS(t) = S(t)(r(t)dt + \sigma(t)dW^*(t))$$

mit Anfangskurs $S_0 = x > 0$.

1. Berechnen Sie den Preis eines digitalen Calls, der zum Zeitpunkt T die Auszahlung 1 liefert, wenn der Aktienpreis in T die Basis $K > 0$ überschreitet.
2. Berechnen Sie den Preis eines entsprechenden digitalen Puts, der zum Zeitpunkt T die Auszahlung 1 liefert, wenn der Aktienpreis die Basis $K > 0$ unterschreitet.
3. Berechnen Sie für beide Optionen die jeweilige Hedgestrategie.
4. Wie kann für eine Funktion $h : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ mit $\mathbb{E}^*h(S_T) < \infty$ der Preis eines Derivates mit Auszahlung $h(S_T)$ durch die Preise von digitalen Optionen ausgedrückt werden.

Aufgabe 2: Firmenwertansatz von Merton

4 Punkte

Der Firmenwertansatz von Merton ist eine Methode ausfallgefährdete Unternehmensanleihen mit Optionspreistheorie zu bewerten. Im ursprünglichen einfachsten Modell wird eine Firmenwertentwicklung (X_t) der Form

$$dX(t) = X(t)(\mu dt + \sigma dW(t))$$

mit Anfangswert $x_0 > 0$ angenommen. Weiterhin wird vorausgesetzt, dass Kapital auf einem Geldmarktkonto sich mit der konstanten Rate $r > 0$ verzinst.

Ein Fremdkapitalgeber der Firma leiht der Firma einen Nominalbetrag F für T Zeiteinheiten. Dieser Kredit kann dann zurückgezahlt werden, wenn das Vermögen der Firma zum Zeitpunkt T die Verbindlichkeit F übersteigt. Reicht das Vermögen der Firma zum Zeitpunkt T nicht aus, um die Verbindlichkeit vollständig zu begleichen, muß die Firma Konkurs anmelden und die Konkursmasse zur weitestgehenden Begleichung der Schulden benutzen.

Das Eigenkapital der Firma zur Zeit t ist das Vermögen zu diesem Zeitpunkt vermindert um den Wert des Fremdkapitals zur Zeit t .

1. Bestimmen Sie unter der Annahme, dass das gesamte Fremdkapital nur von einer Adresse gegeben wird, den Wert der Position des Fremdkapitalgebers. Hinweis: Wie können Sie die Position des Fremdkapitalgebers durch ein Derivat beschreiben.
2. Wie können Sie die Position des Eigenkapitalgebers durch ein Derivat beschreiben und wie können Sie diese bewerten.

Aufgabe 3: Asset or nothing call option

4 Punkte

Wir betrachten das Black-Scholes Modell aus Aufgabe 1. Eine asset or nothing call option mit Fälligkeit T und Basis K ist ein Derivat mit Auszahlung $S_T 1_{\{S_T \geq K\}}$ zum Zeitpunkt T .

1. Bestimmen Sie den arbitragefreien Anfangspreis dieser Option?
2. Bestimmen Sie eine Replikationsstrategie.
3. Was passiert mit ihrem Aktienanteil im Hedge, falls das asset einen Preis nahe K hat zu Zeitpunkten t nahe T . Kommentieren Sie dies.

Aufgabe 4: Forward start option

4 Punkte

Wir betrachten das Black-Scholes Modell aus Aufgabe 1. Eine forward start option gibt deren Inhaber das Recht zum Zeitpunkt $T_0 < T_1$ ohne Einsatz von Kapital einen Call mit Fälligkeit T_1 und Basis $S(T_0)$ zu erwerben.

1. Geben Sie den arbitragefreien Preisprozeß dieser Option an.
2. Wie können Sie diese Option replizieren?