Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Zakhar Kabluchko
Michael Stolz

SS 2015
10.06.2015

Extremwerttheorie - Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Positionen der Sterne im Universum seien mit einem homogenen Poisson-Punktprozess Π auf $\mathbb{R}^3$ modelliert, dessen Intensität gleich $\lambda > 0$ sei. Für $x \in \mathbb{R}^3$ sei $|x|$ der Abstand von x zum Koordinatenursprung. Die Punkte von Π (also die Positionen der Sterne) seien mit $X_1, X_2, \ldots$ bezeichnet, wobei die Nummerierung so gewählt sei, dass $|X_1| < |X_2| < \ldots$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert von $|X_1|$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es seien $X_1, \ldots, X_{n+m}$, wobei $n, m \in \mathbb{N}$, unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion. Bestimmen Sie

$$\mathbb{P}[\max\{X_1, \ldots, X_n\} > \max\{X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}\}].$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei π ein Poisson-Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensitätsmaß μ. Seien $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}^d$ disjunkte beschränkte Borel-Mengen mit $A = \cup_{i=1}^n A_i$. Zeigen Sie, dass für alle $k_1, \ldots, k_n, k \in \{0, 1, \ldots\}$ mit $k_1 + \ldots + k_n = k$ gilt

$$\mathbb{P}[\pi(A_1) = k_1, \ldots, \pi(A_n) = k_n | \pi(A) = k] = \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!} \left(\frac{\mu(A_1)}{\mu(A)}\right)^{k_1} \ldots \left(\frac{\mu(A_n)}{\mu(A)}\right)^{k_n}.$$

Bemerkung. Diese Aussage lässt sich wie folgt interpretieren: Gegeben, dass die Menge A genau k Punkte des Poisson-Punktprozesses enthält, sind die Punkte in den jeweiligen Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$ gemäß einer Multinomialverteilung mit Parameter $\left(\frac{\mu(A_1)}{\mu(A)}, \ldots, \frac{\mu(A_n)}{\mu(A)}\right)$ verteilt.

Aufgabe 4 (5+2 Punkte)

N Personen spielen folgendes Spiel. In der ersten Runde wirft jede Person eine faire Münze. Personen, bei denen die Münze “Kopf” zeigt, scheiden aus. Für alle anderen Personen beginnt die zweite Runde. Jede Person wirft wieder eine faire Münze. Personen, bei denen die Münze “Kopf” zeigt, scheiden aus, alle anderen spielen weiter, usw. Das Spiel endet, wenn alle Personen ausgeschieden sind. Es sei T_N die Anzahl der Runden in diesem Spiel.

(a) Bestimmen Sie die Grenzwertverteilung von $T_{[\lambda 2^n]} - n$, für $n \to \infty$, wobei $\lambda > 0$ eine Konstante ist.

(b) Konvergiert die Folge $T_N - \log_2 N$ in Verteilung für $N \to \infty$? Hiere bezeichnet $\log_2$ den Logarithmus zur Basis 2.