Zakhar Kabluchko
Michael Stolz

SS 2015
03.06.2015

Extremwerttheorie - Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen Sie für die Stirling–Zahl erster Art die Formel

$$\frac{1}{n!}\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = \sum \frac{1}{i_1 \dots i_k},$$

wobei über alle ganzzahligen $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ summiert wird.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion F, $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ und $\xi_n = \mathbb{1}_{X_n > M_{n-1}}$. Die Rekordzeiten $L(n)$, $n \in \mathbb{N}$, seien gegeben durch

$$L(1) = 1, \quad L(n+1) = \min\{j > L(n) : \ \xi_j = 1\}, \ n > 1.$$

Bestimmen Sie eine Konstante A mit

$$L^{1/n}(n) \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\longrightarrow}} A \quad \text{[in Wahrscheinlichkeit].}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen aus dem Max-Anziehungsbereich der Fréchet-Verteilung Φ_α, $\alpha > 0$, so dass

$$\frac{M_n - a_n}{b_n} \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} \Phi_\alpha.$$

Zeigen Sie, dass für $M_n^{(k)} = X_{n-k+1:n}$ mit festem $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{M_n^{(k)} - a_n}{b_n} \le x\right] = \frac{1}{(k-1)!}\int_{x^{-\alpha}}^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{k-1} \mathrm{d}t, \qquad x > 0.$$

Aufgabe 4 (4+4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion F. Es sei $L(n)$ die n-te Rekordzeit. Man definiere die Rekordwerte $X(n)$, $n \in \mathbb{N}$, durch $X(n) = X_{L(n)}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}[X(n) < x] = Q_n(F(x)), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $Q_n(s) = \mathbb{E}s^{L(n)}$ die erzeugende Funktion von $L(n)$ sei.

(b) Zeigen Sie, dass

$$Q_n(s) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^{-\log(1-s)} t^{n-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t.$$