Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Zakhar Kabluchko
Michael Stolz

SS 2015
20.05.2015

Extremwerttheorie - Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Geben Sie eine Folge $c_n > 0$ und eine nicht degenerierte (min-stabile) Verteilungsfunktion G an mit der Eigenschaft, dass

$$c_n \min\{|X_1|, \dots, |X_n|\} \xrightarrow[n\to\infty]{d} G.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Tailfunktion

$$\bar{F}(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(\log t)^\alpha}, & t > 1, \\ 1, & t \le 1, \end{cases}$$

wobei $\alpha > 1$. Geben Sie explizit Folgen $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ und eine Extremwertverteilung G an mit

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{\max\{X_1, \dots, X_n\} - b_n}{a_n} \le t\right] = G(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit Dichte $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ (Cauchy–Verteilung). Dabei sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}|X_{k:n}| < \infty$ für alle $k = 2, \dots, n-1$, jedoch $\mathbb{E}|X_{1:n}| = \mathbb{E}|X_{n:n}| = +\infty$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Es seien $U_1, \dots, U_n$ unabhängig und gleichverteilt auf $[0,1]$, $n \ge 2$. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen

$$T_1 := \frac{U_{1:n}}{U_{2:n}}, \; T_2 := \left(\frac{U_{2:n}}{U_{3:n}}\right)^2, \; \dots \;, T_{n-1} := \left(\frac{U_{n-1:n}}{U_{n:n}}\right)^{n-1}, \; T_n = U_{n:n}^n$$

ebenfalls unabhängig und gleichverteilt auf $[0,1]$ sind.