WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Zakhar Kabluchko
Michael Stolz

SS 2015
13.05.2015

Extremwerttheorie - Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichtefunktion f und Verteilungsfunktion F. Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte der Ordnungsstatistiken $X_{i:n}$ und $X_{j:n}$, wobei $1 \le i < j \le n$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion des Vektors (M_n, M_{n+1}), wobei $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ und $M_{n+1} = \max\{X_1, \dots, X_{n+1}\}$.

Aufgabe 3 (1 + 1 + 2 + 1 Punkte)

Seien $Z_1, \dots, Z_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[Z_i > t] = \mathrm{e}^{-t}$, $t > 0$ (Standardexponentialverteilung). Zeigen Sie, dass für die Ordnungstatistiken $Z_{1:n} \le \ldots \le Z_{n:n}$ gilt

(a) $\mathbb{E}[Z_{k:n}] = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{n-k+1}$.

(b) $\operatorname{Var}[Z_{k:n}] = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n-k+1)^2}$.

(c) $\operatorname{Cov}(Z_{k:n}, Z_{l:n}) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n-k+1)^2}$ falls $1 \le k \le l \le n$.

(d) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var} Z_{n:n}$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es seien $U_1, \dots, U_n$ unabhängige, auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die folgende Verteilungskonvergenz gilt:

$$(nU_{1:n}, \dots, nU_{k:n}) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (\nu_1, \nu_1 + \nu_2, \dots, \nu_1 + \ldots + \nu_k),$$

wobei $\nu_1, \nu_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[\nu_i > t] = \mathrm{e}^{-t}$, $t > 0$, sind (Standardexponentialverteilung). Zeigen Sie auch, dass

$$(n(1 - U_{n:n}), \dots, n(1 - U_{n-k+1:n})) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (\nu_1, \nu_1 + \nu_2, \dots, \nu_1 + \ldots + \nu_k).$$