Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Zakhar Kabluchko
Michael Stolz

SS 2015
06.05.2015

Extremwerttheorie - Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei X eine Pareto–verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$. In welchem Max–Anziehungsbereich liegt X?

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit Beta(α, β)-Verteilung, d.h. die Dichte von X_i sei gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}, & \text{für } t \in [0,1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\mathrm{d}t$ die Eulersche Beta-Funktion und $\alpha > 0$, $\beta > 0$ sind Parameter. Geben Sie explizit Konstanten $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ sowie eine nichtdegenerierte Verteilungsfunktion G mit

$$\frac{\max\{X_1, \dots, X_n\} - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} G$$

an.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{1/t}, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass F im Max-Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung liegt (obwohl der rechte Endpunkt endlich ist) und geben Sie explizit Konstanten $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ an mit

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{\max\{X_1, \dots, X_n\} - b_n}{a_n} \leq t\right] = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion $L(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{\log x}\cdot\cos\left(\sqrt[4]{\log x}\right)}$, $x > \mathrm{e}$, folgende Eigenschaften besitzt:

(a) L is langsam variierend in $+\infty$.

(b) $\limsup_{t\to+\infty} L(t) = +\infty$ und $\liminf_{t\to+\infty} L(t) = 0$.