Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Zakhar Kabluchko
Michael Stolz

SS 2015
29.04.2015

Extremwerttheorie - Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei L eine langsam variierende Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log L(x)}{\log x} = 0.$$

Aufgabe 2 (3+3 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte f und Verteilungsfunktion F. Beweisen Sie:

(a) Gilt $f(t) \sim Kt^{-\alpha}$, $t \to +\infty$, mit $K > 0$ und $\alpha > 1$, so folgt

$$\bar{F}(t) \sim \frac{K}{\alpha - 1} t^{1-\alpha}, \qquad t \to +\infty.$$

(b) Gilt $f(t) \sim Kt^{-\alpha} e^{-t^\beta}$, $t \to +\infty$, mit $K > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, so folgt

$$\bar{F}(t) \sim \frac{K}{\beta} t^{1-\alpha-\beta} e^{-t^\beta}, \qquad t \to +\infty.$$

Aufgabe 3 (2+4 Punkte)

Sei F eine Verteilungsfunktion mit $\bar{F}(t) \sim K(\log t)^\alpha t^{-\beta}$, $t \to +\infty$, wobei $K > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$. Zeigen Sie, dass F im Max-Anziehungsbereich der Fréchet-Verteilung Φ_β liegt. Geben Sie so explizit wie möglich eine Folge b_n mit

$$\lim_{n\to\infty} F^n(b_n t) = \mathrm{e}^{-1/t^\beta} \text{ für alle } t > 0$$

an.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)

(a) Die Zufallsvariable X sei geometrisch verteilt mit Parameter $1/2$, d.h. $\mathbb{P}[X = k] = 1/2^k$ für $k = 1, 2, \ldots$. Zeigen Sie, dass X in keinem der drei Max-Anziehungsbereiche liegt.

(b) Die Zufallsvariable Y besitze die Tailfunktion $\bar{F}(t) = 1/\log t$, $t > \mathrm{e}$. Zeigen Sie, dass Y in keinem der drei Max-Anziehungsbereiche liegt.