Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Zakhar Kabluchko
Michael Stolz

SS 2015
22.04.2015

Extremwerttheorie - Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (3+4 Punkte)

(a) Es seien F und G zwei Verteilungsfunktionen mit

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1-F(t)}{1-G(t)} = c,$$

wobei $0 < c < \infty$. Zeigen Sie: Liegt F im Max-Anziehungsbereich der Fréchet-Verteilung Φ_α, so liegt auch G im Max-Anziehungsbereich von Φ_α.

(b) In der Versicherungsmathematik wird für die Modellierung der Schadenhöhen manchmal die sogenannte Burr-Verteilung mit Verteilungsfunktion

$$F(t) = 1 - \left(\frac{C}{C+t^\beta}\right)^\alpha, \quad t \geq 0, \quad (F(t) = 0 \text{ für } t \leq 0)$$

verwendet. Dabei sind $C > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ Parameter. Zeigen Sie, dass die Burr-Verteilung im Max-Anziehungsbereich einer Fréchet-Verteilung liegt, und geben Sie explizit eine Folge a_n an, für die M_n/a_n gegen eine Fréchet–Verteilung konvergiert. [Dabei sei M_n das Maximum von n u.i.v. Zufallsvariablen mit der Burr–Verteilung].

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Eine Zufallsvariable X (bzw. deren Verteilungsfunktion F) heißt **min-stabil**, wenn es für jedes $n \in \mathbb{N}$ Konstanten $c_n > 0$ und $d_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\frac{\min\{X_1, \dots, X_n\} - d_n}{c_n} \stackrel{d}{=} X.$$

Dabei werden mit $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F bezeichnet. Beschreiben Sie die Klasse der min-stabilen Verteilungen. *Hinweis:* Aus einer min-stabilen Zufallsvariable lässt sich sehr schnell eine max-stabile Zufallsvariable konstruieren.

Aufgabe 3 (2+4 Punkte)

(a) Seien $f \in \mathrm{RV}_\alpha$ und $g \in \mathrm{RV}_\beta$. Zeigen Sie, dass das Produkt fg ebenfalls regulär variierend mit Index $\alpha + \beta$ ist.

(b) Seien $f \in \mathrm{RV}_\alpha$ und $g \in \mathrm{RV}_\beta$, und es gelte außerdem $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Zeigen Sie, dass die Komposition $f(g(x))$ ebenfalls regulär variierend mit Index $\alpha\beta$ ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Eine Funktion $L : (A, \infty) \to (0, \infty)$ sei *monoton* (steigend oder fallend) mit der Eigenschaft, dass

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{L(2x)}{L(x)} = 1.$$

Zeigen Sie, dass L langsam variierend ist. (Satz von Landau, 1911).