Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Zakhar Kabluchko
Michael Stolz

SS 2015
17.06.2015

Extremwerttheorie - Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvektoren mit Werten in $\mathbb{R}^d$ und Verteilung μ. Bestimmen Sie das Laplace-Funktional $\psi_\pi(f)$ des Binomialpunktprozesses $\pi = \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

In einem zweidimensionalen kreisförmigen Land vom Radius $R > 0$ seien die Städte $X_1, \ldots, X_N$ durch einen homogenen Poisson-Punktprozess mit Intensität $\lambda > 0$ modelliert. Die Hauptstadt des Landes liege dabei im Mittelpunkt des Kreises. Es sollen nun alle Städte mit der Hauptstadt verbunden werden. Bestimmen Sie die erwartete Streckenlänge aller Straßen zusammen, d.h. bestimmen Sie

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} |X_i|\right],$$

wobei mit $|x|$ der Abstand des Punktes x zum Ursprung bezeichnet sei.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es sei $\pi = \sum_i \delta_{X_i}$ ein Poisson-Punktprozess auf $\mathbb{R}^d$ mit Intensitätsmaß μ und sei f eine nichtnegative Borel-Funktion auf $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass für die lineare Statistik $S_f = \sum_i f(X_i)$ gilt

$$\mathbb{E}[S_f^2] = \int_{\mathbb{R}^d} f^2(x)\mathrm{d}\mu(x) + \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{d}\mu(x)\right)^2.$$

Hinweis: Betrachten Sie die zweite Ableitung von $\log \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\theta S_f}]$ an der Stelle $\theta = 0$. Vertauschung von Integral und Ableitung darf unbegründet bleiben.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim N(0,1)$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{n \cdot X_i} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{PPP}(\lambda \mathrm{d}t)$$

auf $\mathbb{R}$ und bestimmen Sie λ.