Zakhar Kabluchko
Michael Stolz

SS 2015
08.04.2015

Extremwerttheorie - Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (2 + 3 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F.

(a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $m_n := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

(b) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion von m_n und $M_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, d.h. berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[m_n \leq x, M_n \leq y]$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie: Ist F eine Gumbel-, Fréchet- oder Weibullverteilung, so gibt es reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable

$$\frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\} - b_n}{a_n}$$

ebenfalls gleich F ist, für alle $n \in \mathbb{N}$. [Somit liegt jede der drei Verteilungen in ihrem eigenen Max-Anziehungsbereich].

Aufgabe 3 (1 + 2 + 2 Punkte)

Zwei Verteilungsfunktionen F und G heißen vom selben Typ (Schreibweise: $F \bowtie G$), falls es $c > 0$ und $d \in \mathbb{R}$ gibt, so, dass $G(t) = F((t-d)/c)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $F \bowtie G$ eine Äquivalenzrelation ist, d.h.

a) $F \bowtie F$.

b) $F \bowtie G \;\Rightarrow\; G \bowtie F$.

c) $F \bowtie G, G \bowtie H \;\Rightarrow\; F \bowtie H$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(t) = e^{(\log t)^\beta}$ für $0 < \beta < 1$ langsam variierend ist. Zeigen Sie, dass für $\beta > 1$ dieselbe Funktion nicht regulär variierend ist. Zeigen Sie, dass die Funktion $g(t) = 2 + \sin t$ nicht regulär variierend ist.