KAPITEL 9

Poisson–Punktprozesse

Poisson–Punktprozesse sind natürliche Modelle für zufällige Konfigurationen von Punkten im Raum. Als Beispiele von zufälligen Konfigurationen, die mit Poisson–Prozessen modelliert werden können, kann man sich die Positionen der Sterne im Himmel, die Regentropfen auf dem Boden, die Meteoriteinschläge auf dem Mond, oder die Zeitpunkte, zu denen bei einer Telefonzentrale die Anrufe ankommen, vorstellen. Wie schon der Name sagt, spielt die Poisson–Verteilung eine entscheidende Rolle. Wir werden also mit der Definition der Poisson–Verteilung beginnen.

9.1. Poisson–Verteilung

Man betrachte n Bernoulli–Experimente mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Bezeichnet man mit $S_{n,p}$ die Anzahl der Erfolge in diesen Experimenten, so ist $S_{n,p}$ eine binomialverteilte Zufallsvariable, d.h.

$$\mathbb{P}[S_{n,p} = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, \dots, n.$$

Der Poisson–Grenzwertsatz behandelt die Situation, in der die Anzahl der Experimente sehr groß, die Erfolgswahrscheinlichkeit jedoch sehr gering ist.

Satz 9.1.1 (Poisson–Grenzwertsatz)**.** Es sei $p_1, p_2, \ldots \in [0,1]$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$, wobei $\lambda \geq 0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[S_{n,p_n} = k] = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

Definition 9.1.2. Eine Zufallsvariable S heißt **Poisson–verteilt** mit Parameter $\lambda > 0$, falls

$$\mathbb{P}[S = k] = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

Wir benutzen die Schreibweise $S \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$. Die obige Definition kann man etwas erweitern. Wir sagen, dass $S \sim \mathrm{Poi}(0)$, falls $S = 0$ fast sicher. Außerdem sagen wir, dass $S \sim \mathrm{Poi}(+\infty)$, falls $S = +\infty$ fast sicher.

9.2. Beispiel zu Poisson–Prozessen

Wir betrachten nun wieder eine sehr große Zahl von unabhängigen Experimenten mit sehr kleinen Erfolgswahrscheinlichkeiten. Diesmal stellen wir uns aber vor, dass jedes Experiment eine Position im Raum besitzt. Die Positionen der Experimente, die mit einem Erfolg ausgehen, bilden eine zufällige Konfiguration von Punkten im Raum. Diese Konfiguration beschreibt man mit einem Poisson–Punktprozess.

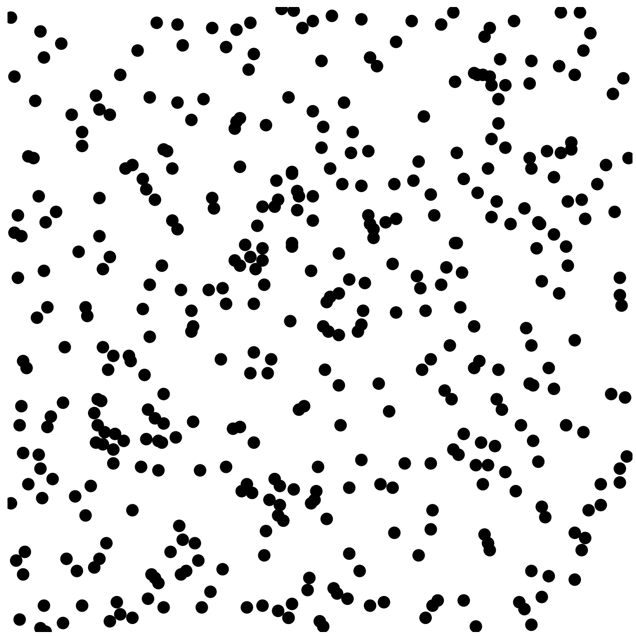

ABBILDUNG 1. Homogener Poisson–Punktprozess.

Zum Beispiel können wir versuchen, ein stochastisches Modell für die Verteilung der Sterne im Himmel zu finden. Ist A ein Gebiet (ein Teil des Himmels), so bezeichnen wir mit $\pi(A)$ die Anzahl der Sterne in A. Diese Anzahl fassen wir als eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$ auf. Wir gehen davon aus, dass die folgenden natürlichen Eigenschaften gelten:

(1) Für disjunkte Gebiete $A_1, \ldots, A_n$ sind die Zufallsvariablen $\pi(A_1), \ldots, \pi(A_n)$ unabhängig.
(2) Die Wahrscheinlichkeit, dass es in einem kleinen Gebiet Q mit Fläche $\epsilon \approx 0$ einen Stern gibt, ist $\approx \lambda\varepsilon$.

Der Koeffizient $\lambda > 0$ beschreibt dabei die Intensität der Sterne im Himmel.

Wie ist nun die Anzahl der Sterne $\pi(A)$ in einem beliebigen Gebiet A verteilt? Um dies herauszufinden, unterteilen wir A in kleine Gebiete mit Fläche ϵ. Die Anzahl dieser Gebiete ist $\approx$ Fläche$(A)/\epsilon$. Aus unseren Voraussetzungen und dem Poisson–Grenzwertsatz folgt, dass

$$\pi(A) \approx \text{Bin}\left(\frac{\text{Fläche}(A)}{\epsilon}, \lambda\epsilon\right) \approx \text{Poi}\left(\lambda \cdot \text{Fläche}(A)\right) \text{ für } \epsilon \downarrow 0.$$

Es gilt also:

Für jedes Gebiet A ist $\pi(A)$ Poisson–verteilt mit Parameter $\lambda \cdot$ Fläche(A).

Eine zufällige Konfiguration von Punkten im Raum, die die beiden oben genannten Eigenschaften hat, bezeichnen wir als einen **homogenen Poisson–Punktprozess** mit Intensität λ.

9.3. Definition der Zählmaße und Punktprozesse

Wir werden nun eine mathematische Definition der Poisson–Punktprozesse geben. Die erste Frage ist, wie man eine "Punktekonfiguration" definiert. Zuerst müssen wir einige Forderungen an den Raum formulieren, wo die Punkte leben.

Lokal kompakte separable metrische Räume. Sei (E, ρ) ein metrischer Raum mit Metrik ρ. Als Beispiel kann man sich $E = \mathbb{R}^d$ mit der üblichen Euklid'schen Metrik vorstellen.

Definition 9.3.1. Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt **kompakt**, wenn jede Folge $x_1, x_2, \ldots \in A$ eine Teilfolge besitzt, die gegen ein Element aus A konvergiert.

Zum Beispiel ist jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ (versehen mit der Euklid'schen metrik) kompakt. Es ist bekannt, dass kompakte Mengen immer abgeschlossen sind.

Definition 9.3.2. Der Raum (E, ρ) heißt **lokal kompakt**, wenn man für jeden Punkt $x \in E$ ein $r > 0$ finden kann, so dass der abgeschlossene Ball

$$\bar{B}_r(x) = \{y \in E \colon \rho(x, y) \le r\}$$

kompakt ist.

Zum Beispiel ist jede abgeschlossene und jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ lokal kompakt. Nicht lokal kompakt ist z.B. der Raum $C[0, 1]$ der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$ versehen mit der Supremumsmetrik.

Definition 9.3.3. Der Raum (E, ρ) heißt **separabel**, wenn es eine abzählbare Teilmenge $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset E$ gibt, die in E überall dicht liegt. Das heißt, für alle $x \in E$ und $r > 0$ enthält der Ball $\bar{B}_r(x)$ mindestens einen Punkt der Form x_i.

Beispiel 9.3.4. Nicht jeder lokal kompakter Raum ist separabel: Betrachte eine beliebige überabzählbare Menge E (z.B. $E = \mathbb{R}$) versehen mit der diskreten Metrik

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

Dieser Raum ist lokal kompakt aber nicht separabel.

Zählmaße. Sei im Folgenden (E, ρ) ein metrischer Raum. Als Beispiel kann man sich immer eine abgeschlossene oder eine offene Menge von $\mathbb{R}^d$ mit der Euklid'schen Metrik vorstellen.

Definition 9.3.5. Die **Borel**–σ–Algebra $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E)$ ist die durch die Familie aller offenen Teilmengen von E erzeugte σ-Algebra.

Man kann $\mathcal{B}$ auch als die durch die Familie aller abgeschlossenen Teilmengen erzeugte σ–Algebra definieren, denn eine Menge A ist offen genau dann, wenn A^c abgeschlossen ist.

Definition 9.3.6. Ein Maß μ auf $(E, \mathcal{B})$ heißt **lokal endlich** (oder **Radon–Maß**), wenn für jede kompakte Menge $B \subset E$ deren Maß $\mu(B)$ endlich ist.

Zum Beispiel ist das Lebesgue–Maß auf $\mathbb{R}^d$ lokal endlich.

Beispiel 9.3.7. Sei $x \in E$. Das **Dirac–Maß** δ_x ist definiert durch

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich ist δ_x lokal endlich. Man kann sich δ_x als eine Punktekonfiguration vorstellen, die aus einem Punkt x besteht.

Beispiel 9.3.8. Das Maß $\mu := \sum_{x \in \mathbb{Q}} \delta_x$ auf $\mathbb{R}$ (wobei $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen ist) ist nicht lokal endlich, denn $\mu([0, 1]) = +\infty$.

Definition 9.3.9. Ein lokal endliches Maß μ auf $(E, \mathcal{B})$ heißt **Zählmaß**, falls für jede kompakte Menge $A \subset E$, $\mu(A)$ eine nicht-negative ganze Zahl ist.

Beispiel 9.3.10. Jedes Dirac–Maß δ_x ist ein Zählmaß. Jede endliche Summe von Dirac–Maßen der Form $\mu = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ mit $x_1, \ldots, x_i \in E$ ist ein Zählmaß. Auch eine abzählbar unendliche Summe $\mu = \sum_{i=1}^\infty \delta_{x_i}$ ist ein Zählmaß, vorausgesetzt, dass die Folge $x_1, x_2, \ldots \in E$ keine Häufungspunkte besitzt. Der folgende Satz besagt, dass auf einem lokal kompakten separablen Raum jedes Zählmaß diese Form besitzt.

Satz 9.3.11. Sei E ein lokal kompakter separabler metrischer Raum. Dann lässt sich jedes Zählmaß μ auf E als

$$\mu = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$$

darstellen, wobei $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $x_1, x_2, \ldots$ eine endliche oder abzählbar unendliche Folge von Punkten in E ist, die keine Häufungspunkte besitzt.

Beweis. Weggelassen. $\square$

Auf lokal kompakten separablen Räumen können wir also Zählmaße mit höchstens abzählbaren Konfigurationen von Punkten identifizieren, die keine Häufungspunkte besitzen.

Beispiel 9.3.12. Das Maß $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{1/i}$ ist ein Zählmaß auf $E = (0, \infty)$, denn die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ besitzt keine Häufungspunkte in $(0, \infty)$. Auf dem Raum $E = [0, \infty)$ ist jedoch das gleiche Maß μ kein Zählmaß, denn 0 ist ein Häufungspunkt.

Punktprozesse. Wir wollen nun definieren, was eine *zufällige* Punktekonfiguration ohne Häufungpunkte (ein zufälliges Zählmaß) ist. Solche zufälligen Punktekonfigurationen heißen Punktprozesse. Es sei (E, ρ) ein lokal kompakter separabler metrischer Raum. Wir bezeichnen mit $\mathbb{M} = \mathbb{M}(E)$ die Menge aller Zählmaße auf E.

Definition 9.3.13. Sei $\mathcal{M} \subset 2^{\mathbb{M}}$ die von allen Mengen der Form

$$U_A^k := \{\mu \in \mathbb{M} \colon \mu(A) = k\} \subset \mathbb{M},$$

erzeugte σ-Algebra, wobei $A \subset E$ eine Borel–Menge und $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ ist.

Die σ–Algebra $\mathcal{M}$ enthält auch Mengen der Form

$$U_{A_1,\ldots,A_n}^{k_1,\ldots,k_n} := \{\mu \in \mathbb{M} \colon \mu(A_1) = k_1, \ldots, \mu(A_n) = k_n\} = U_{A_1}^{k_1} \cap \ldots \cap U_{A_n}^{k_n},$$

wobei $n \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ und $A_1, \ldots, A_n \subset E$ Borel–Mengen.

Definition 9.3.14. Ein **Punktprozess** ist eine messbare Abbildung π von einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ nach $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$.

Für jedes $\omega \in \Omega$ ist somit $\pi(\omega)$ ein Zählmaß (=eine Punktekonfiguration) auf E.

Notation 9.3.15. Für eine Borel–Menge $A \subset E$ bezeichnen wir mit $\pi(A; \omega)$ oder auch abgekürzt mit $\pi(A)$ die Anzahl der Punkte dieser Punktekonfiguration in der Menge A.

Dann ist $\pi(A) : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$, $\omega \mapsto \pi(A; \omega)$, eine Zufallsvariable, denn für jedes $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ ist das Urbild

$$\{\omega \in \Omega \colon \pi(A; \omega) = k\} = \pi^{-1}(U_A^k)$$

$\mathcal{A}$–messbar.

Beispiel 9.3.16. Sei $N \in \mathbb{N}$ fest und es seien $X_1, \ldots, X_N$ u.i.v. Zufallsvektoren mit Werten in $\mathbb{R}^d$. Der Punktprozess

$$\pi = \sum_{i=1}^{N} \delta_{X_i}$$

wird **Binomialpunktprozess** genannt, denn die Anzahl der Punkte von π in einer Borel–Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist binomialverteilt:

$$\pi(A) \sim \mathrm{Bin}(N, \mathbb{P}[X_1 \in A]).$$

9.4. Definition der Poisson–Punktprozesse

Sei μ ein lokal endliches Maß auf einem lokal kompakten separablen metrischen Raum (E, ρ). Als Beispiel von E kann man sich immer eine abgeschlossene oder eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ vorstellen.

Definition 9.4.1. Ein Punktprozess π auf E heißt **Poisson–Punktprozess** mit **Intensitätsmaß** μ, falls folgende zwei Bedingungen gelten:

1. Für alle Borel–Mengen $A \subset E$ ist $\pi(A)$ Poisson–verteilt mit Parameter $\mu(A)$.
2. Für alle disjunkten Borel–Mengen $A_1, \ldots, A_n \subset E$ sind die Zufallsvariablen $\pi(A_1), \ldots, \pi(A_n)$ unabhängig.

Wir benutzen die Schreibweise $\pi \sim \mathrm{PPP}(\mu)$.

Bemerkung 9.4.2. Aus der ersten Eigenschaft folgt, dass $\mathbb{E}\pi(A) = \mu(A)$. Das Intensitätsmaß beschreibt also die erwartete Anzahl der Punkte in einem Poisson–Punktprozess.

In den Fällen, die für uns von Interesse sind, hat das Maß μ eine Dichte bezüglich des Lebesgue–Maßes.

Definition 9.4.3. Eine messbare Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ heißt **lokal integrierbar**, falls $\int_B |f(t)| \mathrm{d}t < \infty$ für jede kompakte Menge $B \subset E$.

Ist nun f eine nicht-negative lokal integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}^d$ (oder allgemeiner auf einer offenen oder abgeschlossenen Teilmenge von $\mathbb{R}^d$), so kann man ein lokal endliches Maß μ mit

$$\mu(B) = \int_B f(t) \mathrm{d}t$$

für alle Borel–Mengen $B \subset E$ definieren. Die Funktion f heißt die **Dichte** von μ und wir schreiben dann $\mu(\mathrm{d}t) = f(t)\mathrm{d}t$. Einen Poisson–Punktprozess $\pi \sim \mathrm{PPP}(\mu)$ werden wir dann auch mit $\mathrm{PPP}(f(t)\mathrm{d}t)$ bezeichnen. Die Funktion f nennen wir dann die **Intensität** von π.

Beispiel 9.4.4. Im Beispiel mit dem Sternenhimmel haben wir einen Poisson–Punktprozess mit einer konstanten Intensität $f(t) = \lambda > 0$ betrachtet. Ein solcher Poisson–Punktprozess heißt **homogen**; siehe Abbildung 1.

Beispiel 9.4.5. Einen Poisson–Punktprozess auf $(0,\infty)$ mit konstanter Intensität $\lambda > 0$ kann man folgendermaßen konstruieren. Seien $E_1, E_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, d.h.

$$\mathbb{P}[E_i > t] = \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Dann bilden die Punkte $E_1, E_1 + E_2, E_1 + E_2 + E_3, \ldots$ einen Poisson–Punktprozess mit Intensität λ (ohne Beweis).

Durch eine zweiseitige Version des obigen Verfahrens kann man auch einen Poisson–Punktprozess auf ganz $\mathbb{R}$ mit Intensität λ konstruieren. Dazu seien $E_1, E_1', E_2, E_2', \ldots$ unabhängige und mit Parameter λ exponentialverteilte Zufallsvariablen. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_{E_1+\ldots+E_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{-(E_1'+\ldots+E_n')}$$

ein Poisson–Punktprozess auf $\mathbb{R}$ mit konstanter Intensität λ.

9.5. Superpositionssatz

Eine wichtige Eigenschaft der Poisson–Verteilung ist ihre Faltungsstabilität. Sind nämlich $X_1 \sim \mathrm{Poi}(\lambda_1), \ldots, X_n \sim \mathrm{Poi}(\lambda_n)$ unabhängige Zufallsvariablen, so gilt

$$X_1 + \ldots + X_n \sim \mathrm{Poi}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n).$$

Wir beweisen, dass diese Eigenschaft auf unendliche Summen erweitert werden kann.

Satz 9.5.1. Seien $X_i \sim \mathrm{Poi}(\lambda_i)$, $i \in \mathbb{N}$, unabhängige Zufallvariablen mit $\lambda_i \in [0,\infty]$. Dann gilt:

$$S := \sum_{i=1}^{\infty} X_i \sim \mathrm{Poi}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\right).$$

Bemerkung 9.5.2. Wenn $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \infty$, dann gilt $S = \infty$ fast sicher.

Beweis. Wenn mindestens ein λ_i unendlich ist, dann ist $X_i = S = +\infty$ fast sicher und die Aussage stimmt. Seien also alle λ_i endlich. Sei $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ und $\sigma_n = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$. Bekannt ist bereits, dass $S_n \sim \mathrm{Poi}(\sigma_n)$. Sei $r \in \mathbb{N}_0$, dann gilt

$$\{S_1 \le r\} \supseteq \{S_2 \le r\} \supseteq \ldots \quad \text{und} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} \{S_i \le r\} = \{S \le r\}$$

Deshalb gilt wegen der Stetigkeit der Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}[S \le r] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[S_n \le r] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{r} \mathrm{e}^{-\sigma_n} \frac{\sigma_n^k}{k!},$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde, dass $S_n \sim \mathrm{Poi}(\sigma_n)$. Man kann hier zwei Fälle unterscheiden:

Fall 1: $\sigma_n \to \sigma$ mit $\sigma < \infty$. Dann gilt: $\mathbb{P}[S \le r] = \sum_{k=0}^{r} \mathrm{e}^{-\sigma} \frac{\sigma^k}{k!}$ und daher ist $S \sim \mathrm{Poi}(\sigma)$.
Fall 2: $\sigma_n \to \infty$. Dann gilt: $\mathbb{P}[S \le r] = 0$ für alle $r \in \mathbb{N}$ und somit ist $S = \infty$ fast sicher.

□

Es seien $\pi_1, \pi_2, \dots$ Punktprozesse, die auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert sind. Die **Superposition** $\pi = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i$ der Punktprozesse $\pi_1, \pi_2, \dots$ ist die Vereinigung aller Punkte dieser Punktprozesse:

$$\pi(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i(A).$$

Hierbei ist π nicht immer ein Punktprozess, denn die unendliche Summe $\pi(A)$ kann auch für eine kompakte Menge A unendlich sein. Im nächsten Satz beweisen wir, dass die Superposition von unabhängigen Poisson–Punktprozessen wieder ein Poisson–Punktprozess ist, wenn die Summe der Intensitätsmaße wieder ein lokal endliches Maß ist.

Satz 9.5.3. Seien $\pi_i \sim \mathrm{PPP}(\mu_i)$, $i \in \mathbb{N}$, unabhängige Poisson–Punktprozesse, die auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind. Ist $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$ ein lokal endliches Maß, so gilt:

$$\pi := \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \sim \mathrm{PPP}(\mu).$$

Beweis. Sei $A \subset E$ eine Borel–Menge. Es gilt $\pi_i(A) \sim \mathrm{Poi}(\mu_i(A))$, weil $\pi_i \sim \mathrm{PPP}(\mu_i)$. Mit Satz 9.5.1 folgt

$$\pi(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i(A) \sim \mathrm{Poi}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A)\right) = \mathrm{Poi}(\mu(A)).$$

Damit ist die Eigenschaft 1 aus der Definition der Poisson–Punktprozesse gezeigt. Dabei sei bemerkt, dass für eine kompakte Menge A die Zahl $\mu(A)$ endlich ist (denn μ ist ein lokal endliches Maß), somit ist π ein Zählmaß.

Seien nun $A_1, \dots, A_n \subset E$ disjunkte Borel–Mengen. Es gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$:

$$\pi_i(A_1), \dots, \pi_i(A_n) \text{ sind unabhängig, da } \pi_i \sim \mathrm{PPP}(\mu_i).$$

Außerdem sind Punktprozesse $\pi_1, \pi_2, \dots$ unabhängig. Es folgt, dass die Zufallsvariablen

$$\pi(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i(A_1), \quad \dots, \quad \pi(A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i(A_n) \text{ unabhängig sind.}$$

Daher ist auch die zweite Eigenschaft aus der Definition nachgewiesen, woraus die Behauptung folgt. □

9.6. Abbildungssatz

Der Abbildungssatz behauptet grob gesagt, dass dass Bild eines Poisson–Punktprozesses unter einer Abbildung wieder ein Poisson–Punktprozess ist. Diese Behauptung gilt allerdings nicht für jede Abbildung, wie das nächste Beispiel zeigt.

Beispiel 9.6.1. Betrachte einen homogenen Poisson–Punktprozess π auf $\mathbb{R}^2$ mit Intensität 1. Projiziere nun alle Punkte auf die x-Achse. Die Projektionen bilden allerdings gar keinen Punktprozess, denn sie liegen überall dicht in $\mathbb{R}$. In der Tat, jeder Streifen der Form $[a, b] \times \mathbb{R}$ enthält unendlich viele Punkte von π, denn das Lebesgue–Maß dieses Streifens ist unendlich. Somit werden unendlich viele Punkte in das Intervall $[a, b]$ projiziert.

Wir werden deshalb die Klasse der Abbildungen einschränken müssen.

Definition 9.6.2. Eine stetige Abbildung $T : E_1 \to E_2$ zwischen zwei lokal kompakten metrischen Räumen E_1 und E_2 heißt **eigentlich**, wenn für jede kompakte Menge $K \subset E_2$ das Urbild $T^{-1}(K)$ ebenfalls kompakt ist.

Beispiel 9.6.3. Die Projektionsabbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $T(x, y) = x$ ist nicht eigentlich.

Definition 9.6.4. Sei $T : E_1 \to E_2$ eine eigentliche Abbildung zwischen zwei lokal kompakten metrischen Räumen. Sei μ ein lokal endliches Maß auf E_1. Definiere das sogenannte **Bildmaß** $T\mu$ von μ unter T als ein Maß auf E_2 mit

$$(T\mu)(A) = \mu(T^{-1})(A), \quad A \in \mathcal{B}(E_2).$$

Proposition 9.6.5. Das Bildmaß $T\mu$ ist ein lokal endliches Maß auf E_2. Ist μ sogar ein Zählmaß, dann ist $T\mu$ ebenfalls ein Zählmaß.

Beweis. Für jede kompakte Menge $K \subset E_2$ gilt $(T\mu)(K) = \mu(T^{-1}(K)) < \infty$, denn $T^{-1}(K)$ ist kompakt und μ ist ein lokal endliches Maß. Ist μ sogar ein Zählmaß, dann ist $(T\mu)(K) = \mu(T^{-1}(K)) \in \mathbb{N}_0$ und somit $T\mu$ ebenfalls ein Zählmaß. $\square$

Beispiel 9.6.6. Sei μ ein Zählmaß auf E_1 mit $\mu = \sum_i \delta_{x_i}$. Dann ist $T\mu = \sum_i \delta_{Tx_i}$.

Wir können nun den Abbildungssatz formulieren.

Satz 9.6.7 (Abbildungssatz)**.** Sei $T : E_1 \to E_2$ eine eigentliche Abbildung zwischen zwei lokal kompakten metrischen Räumen E_1 und E_2. Sei $\pi \sim \mathrm{PPP}(\mu)$ ein Poisson–Punktprozess auf E_1 mit Intensitätsmaß μ. Dann gilt $T\pi \sim \mathrm{PPP}(T\mu)$.

Beweis. Wir überprüfen, ob die Bedingungen aus Definition 9.4.1 erfüllt sind. Sei $A \subset E_2$ eine Borel–Menge. Es gilt:

$$(T\pi)(A) = \pi(T^{-1}(A)) \sim \mathrm{Poi}(\mu(T^{-1}(A))) = \mathrm{Poi}((T\mu)(A)).$$

Wenn $A \subset E_2$ sogar kompakt ist, dann folgt außerdem, dass $(T\pi)(A) \sim \text{Poi}((T\mu)(A)) < \infty$ fast sicher, weshalb $T\pi$ ein Punktprozess ist.

Seien nun $A_1, \ldots, A_n \subset E_2$ disjunkte Borel–Mengen. Dann sind auch die Urbilder dieser Mengen $T^{-1}(A_1), \ldots, T^{-1}(A_n)$ disjunkt. Es folgt, dass die Zufallsvariablen

$$(T\pi)(A_1) = \pi(T^{-1}(A_1)), \ldots, (T\pi)(A_n) = \pi(T^{-1}(A_n))$$

unabhängig sind, da π ein Poisson–Punktprozess ist. $\square$

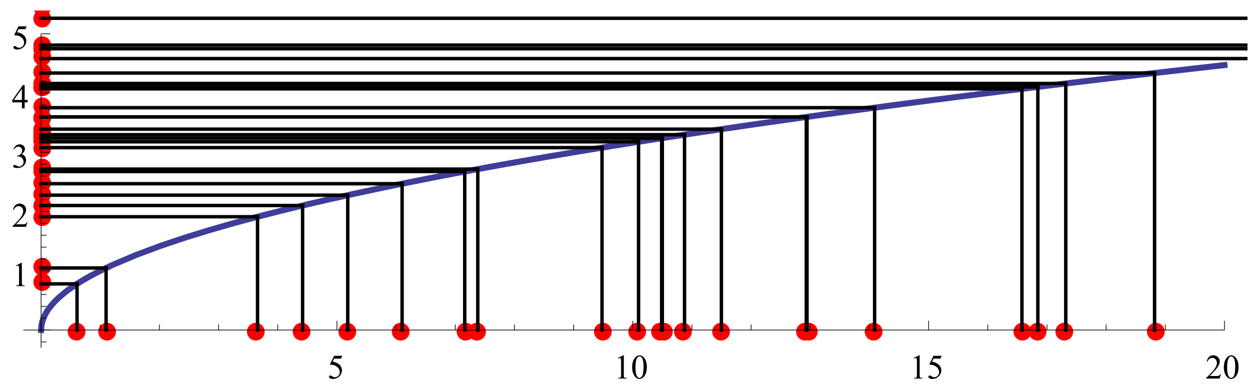

Abbildung 2. Abbildungssatz.

Beispiel 9.6.8 (Siehe Abbildung 2)**.** Seien $P_1 < P_2 < \ldots$ die Punkte eines Poisson–Punktprozesses mit Intensität 1 auf $(0, \infty)$. Betrachte die Punkte $\sqrt{P_1}, \sqrt{P_2}, \ldots$. Diese bilden ebenfalls einen Poissoon–Punktprozess auf $(0, \infty)$, denn die Abbildung $T : (0, \infty) \to (0, \infty)$ mit $T(x) = \sqrt{x}$ ist eigentlich. Sei μ das Lebesgue–Maß auf $(0, \infty)$, dann gilt

$$(T\mu)((0, x)) = \mu(T^{-1}((0, x))) = \mu((0, x^2)) = x^2.$$

Somit hat $T\mu$ die Dichte $f(x) = 2x$, $x > 0$, und die Intensität des Poisson–Punktprozesses $\sqrt{P_1}, \sqrt{P_2}, \ldots$ ist $2x$.

9.7. Laplace–Funktionale

Sei E ein lokal kompakter separabler metrischer Raum.

Definition 9.7.1. Es sei $B(E)$ die Menge aller Borel–Funktionen $f : E \to \mathbb{R}$. Es sei $B_+(E)$ die Menge aller nicht-negativen Borel–Funktionen $f : E \to \mathbb{R}$.

Definition 9.7.2. Sei π ein Punktprozess auf E. Für $f \in B_+(E)$ definiere die Zufallsvariable $S_f = \sum_{x \in \pi} f(x)$ mit Werten in $[0, \infty]$. Dann heißt die Abbildung

$$\psi_\pi : B(E) \to [0, \infty) \text{ mit } \psi_\pi(f) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-S_f}]$$

das **Laplace–Funktional** von π.

Es sei bemerkt, dass für $f \in B(E)$ (ohne die Annahme $f \geq 0$) die unendliche Summe S_f nicht immer wohldefiniert wäre. Im nächsten Satz berechnen wir das Laplace–Funktional eines Poisson–Punktprozesses.

Satz 9.7.3. Sei π ein Poisson–Punktprozess auf E mit Intensitätsmaß μ, dann ist für alle $f \in B_+(E)$

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-S_f}] = \exp\left\{-\int_E (1-\mathrm{e}^{-f(x)})\mu(\mathrm{d}x)\right\}. \tag{9.7.1}$$

Beweis. *Schritt 1.* (Indikatorfunktionen) Sei zuerst $f(x) = c\mathbb{1}_A(x)$, mit $c \in \mathbb{R}$, $A \subset E$ Borel. Dann ist $S_f = c\pi(A)$. Es gilt $\pi(A) \sim \mathrm{Poi}(\mu(A))$. Es fogt

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-S_f}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-c\pi(A)}] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mu(A)}\frac{\mu(A)^k}{k!}\mathrm{e}^{-ck} = \mathrm{e}^{-\mu(A)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu(A)\mathrm{e}^{-c})^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\mu(A)(1-\mathrm{e}^{-c})}.$$

Somit gilt die Behauptung für $f(x) = c\mathbb{1}_A(x)$.

Schritt 2. (Einfache Funktionen) Sei nun $f(x) = c_1 \cdot \mathbb{1}_{A_1}(x) + \ldots + c_n \cdot \mathbb{1}_{A_n}(x)$ mit disjunkten Borel–Mengen $A_1, \ldots, A_n \subset E$ und $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-S_f}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-c_1\pi(A_1)} \cdot \ldots \cdot \mathrm{e}^{-c_n\pi(A_n)}] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-c_i\pi(A_i)}],$$

da π ein Poisson–Punktprozess ist und daher die Zufallsvariablen $\pi(A_1), \ldots, \pi(A_n)$ unabhängig sind. Da wir die Gültigkeit der Behauptung für Indikatorfunktionen bereits im ersten Schritt gezeigt haben, folgt:

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-S_f}] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-c_i\pi(A_i)}] = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)(1-\mathrm{e}^{-c_i})\right\} = \exp\left\{-\int_E (1-\mathrm{e}^{-f(x)})\mu(\mathrm{d}x)\right\}.$$

Schritt 3. Sei nun $f \geq 0$ eine beliebige Borel–Funktion. Dann gibt es einfache Funktionen $f_1, f_2, \ldots$, die punktweise von unten gegen f konvergieren. Da wir die Richtigkeit der Behauptung für einfache Funktionen bereits bewiesen haben, folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz, dass sie auch für f gilt. □

Bemerkung 9.7.4. Die Formel (9.7.1) gilt auch in folgender Form, die etwas allgemeiner ist:

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\theta S_f}] = \exp\left\{-\int_{\mathbb{R}^d} (1-\mathrm{e}^{-\theta f(x)})\mu(\mathrm{d}x)\right\}, \qquad \theta \geq 0.$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung lässt sich nachweisen, indem man $\theta f(x)$ anstelle von $f(x)$ in (9.7.1) einsetzt.

Korollar 9.7.5 (Campbell)**.** Sei $\pi \sim \mathrm{PPP}(\mu)$ auf E und $f \in B_+(E)$, dann gilt:

$$\mathbb{E}[S_f] = \int_E f(x)\mu(\mathrm{d}x).$$

Beweisidee. Wegen Satz 9.7.3 gilt:

$$\mathbb{E}[S_f] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\log \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta S_f}]\Big|_{\theta=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int_E (1-\mathrm{e}^{-\theta f(x)})\mu(\mathrm{d}x)\Big|_{\theta=0}.$$

Durch Vertauschung von Integral und Ableitung (was wir hier nicht begründen werden) lässt sich der Ausdruck wie folgt schreiben und vereinfachen:

$$\mathbb{E}[S_f] = \int_E \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(1-\mathrm{e}^{-\theta f(x)})\Big|_{\theta=0}\mu(\mathrm{d}x) = \int_E f(x)\mu(\mathrm{d}x),$$

was die Behauptung beweist. □

Aufgabe 9.7.6. Zeigen Sie, dass für alle $f \in B_+(E)$

$$\mathbb{E}[S_f^2] = \int_E f^2(x)\mu(\mathrm{d}x) + \left(\int_E f(x)\mu(\mathrm{d}x)\right)^2.$$

Im nächsten Satz zeigen wir, dass man einen Poisson–Punktprozess an seinem Laplace–Funktional erkennen kann.

Satz 9.7.7. Sei π ein Punktprozess auf E mit $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-S_f}] = \mathrm{e}^{-\int_E (1-\mathrm{e}^{-f(x)})\mu(\mathrm{d}x)}$ für alle Funktionen $f \in B_+(E)$, wobei μ ein Radon–Maß ist. Dann ist $\pi \sim \mathrm{PPP}(\mu)$.

Beweis. Wir zeigen, dass $\pi(A) \sim \mathrm{Poi}(\mu(A))$ für alle Borel–Mengen $A \subset E$. Sei $f(x) = \theta \mathbb{1}_A(x)$ mit $\theta \geq 0$. Einsetzen liefert:

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\theta\pi(A)}] = \exp\{-\mu(A)(1-\mathrm{e}^{-\theta})\}, \text{ für alle } \theta \geq 0.$$

Da es sich bei $\exp\{-\mu(A)(1-\mathrm{e}^{-\theta})\}$ um die Laplace–Transformierte einer $\mathrm{Poi}(\mu(A))$–verteilten Zufallsvariable handelt, folgt mit der Eindeutigkeit der Laplace–Transformierten, dass $\pi(A)$ Poisson–verteilt mit Parameter $\mu(A)$ ist.

Seien nun $A_1, \ldots, A_n \subset E$ disjunkte Borel–Mengen. Wir zeigen, dass dann die Zufallsvariablen $\pi(A_1), \ldots, \pi(A_n)$ unabhängig sind. Sei

$$f(x) = \theta_1 \mathbb{1}_{A_1}(x) + \ldots + \theta_n \mathbb{1}_{A_n}(x), \text{ mit } \theta_1, \ldots, \theta_n \geq 0.$$

Einsetzen liefert:

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\theta_1\pi(A_1)} \cdot \ldots \cdot \mathrm{e}^{-\theta_n\pi(A_n)}] = \exp\left\{-\int_E (1-\mathrm{e}^{-f(x)})\mu(\mathrm{d}x)\right\} = \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \mu(A_i)(1-\mathrm{e}^{-\theta_i})\right\}.$$

Somit gilt:

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\theta_1\pi(A_1)}\cdot\ldots\cdot\mathrm{e}^{-\theta_n\pi(A_n)}]=\prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{-\mu(A_i)(1-\mathrm{e}^{-\theta_i})}=\prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\theta_i\pi(A_i)}],$$

woraus folgt, dass $\pi(A_1),\ldots,\pi(A_n)$ unabhängig sind. $\square$

9.8. Färbungs– und Markierungssatz für Poisson–Punktprozesse

Man stelle sich vor, dass jeder Punkt eines Poisson–Punktprozesses auf einem Raum E_1 eine zufällige Farbe (etwa aus der Menge rot, grün, blau) bekommt; siehe Abbildung 3. Wir nehmen an, dass alle Punkte unabhängig voneinander gefärbt werden. Außerdem nehmen wir an, dass die Färbung der Punkte unabhängig von der Erzeugung der Positionen der Punkte geschieht. Bei der zweiten Annahme muss man vorsichtig sein, denn um die Punkte zu färben, muss man wissen, welche Punkte man färben soll, was wie eine Abhängigkeit aussieht. Wir werden deshalb wie folgt vorgehen: Zuerst färben wir *alle* Punkte von E_1 unabhängig voneinander, und erst dann erzeugen wir (unabhängig von der Färbungsprozedur) einen Poisson–Punktprozess. Die Farben der Punkte, die nicht zum Poisson–Punktprozess gehören, werden dann einfach ignoriert. Der Färbungssatz behauptet nun, dass alle Punkte des Poisson–Punktprozesses, die eine gegebene Farbe (etwa rot) haben, ebenfalls einen Poisson–Punktprozess bilden. Außerdem behauptet der Färbungssatz, dass die drei Poisson–Punktprozesse der roten, blauen und grünen Punkte unabhängig voneinander sind.

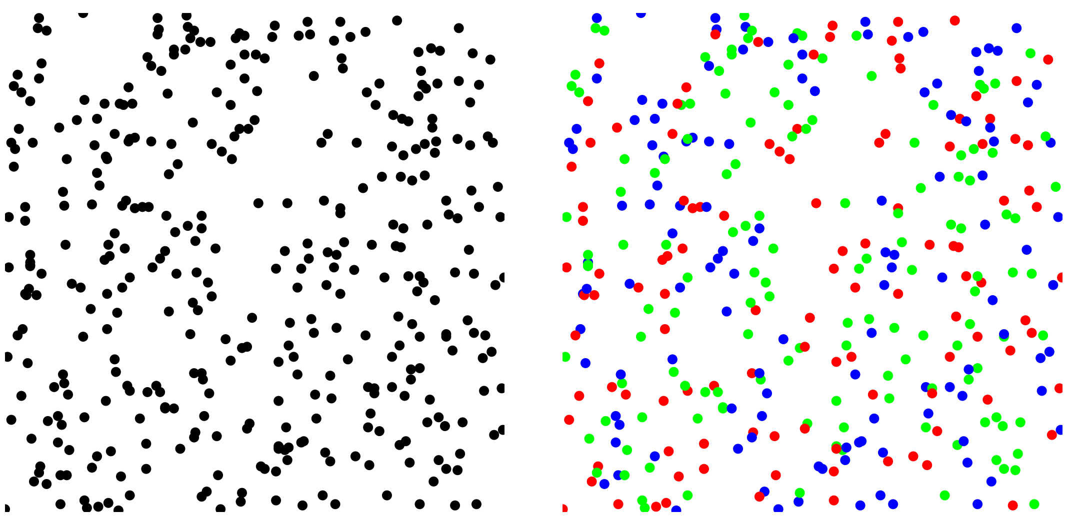

Abbildung 3. Färbungssatz.

Wir werden nun die obigen Überlegungen etwas verallgemeinern. Wir werden eine beliebige Menge E_2 an Farben (z.B. eine stetige Farbpalette) zulassen. Es seien also E_1 und E_2 zwei lokal kompakte separable metrische Räume. Die Konstruktion eines markierten Punktprozesses besteht aus zwei Schritten, die unabhängig voneinander ausgeführt werden sollen.

Schritt 1: Marken. Erzeuge für jeden Punkt $x \in E_1$ eine Zufallsvariable m_x (die Marke oder die Farbe von x) mit Werten in E_2. Wir bezeichnen die Verteilung von m_x mit λ_x. Somit ist λ_x ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf E_2 für jedes $x \in E_1$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß λ_x darf im Allgemeinen eine Funktion von x sein, so dass verschiedene Punkte x nach verschiedenen Regeln gefärbt werden dürfen. Wir brauchen folgende zwei Annahmen:

(1) m_x, $x \in E_1$, sind unabhängige Zufallsvariablen.
(2) $x \mapsto \lambda_x(B)$ ist eine Borel–Funktion für alle Borel–Mengen $B \subset E_2$.

Beispiel 9.8.1. Sei die Menge E_2 aller möglichen Farben endlich. OEdA kann sie dann mit $\{1, \dots, n\}$ identifiziert werden. Wenn die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punkt $x \in E_1$ mit Farbe $i \in \{1, \dots, n\}$ gefärbt wird, mit $p_i(x)$ bezeichnet wird, dann sehen die Verteilungen λ_x folgendermaßen aus:

$$\lambda_x(\{i\}) = p_i(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Die obigen Annahmen besagen dann, dass die Punkte unabhängig gefärbt werden und dass $p_1, \dots, p_n : E_1 \to [0, 1]$ messbare Funktionen sind.

Schritt 2: Positionen der Punkte. Sei außerdem π ein Poisson–Punktprozess auf E_1 mit Intensitätsmaß μ, das unabhängig von den Marken $\{m_x : x \in E_1\}$ erzeugt werden soll. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass μ keine Atome hat (d.h. $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in E_1$), so dass im Punktprozess π keine multiplen Punkte auftreten.

Wir definieren den **markierten Poisson–Punktprozess** π^* auf dem kartesischen Produkt $E_1 \times E_2$ wie folgt:

$$\pi^* = \sum_{x \in \pi} \delta_{(x, m_x)}.$$

Die Schreibweise $x \in \pi$ bedeutet, dass die Summe über alle Punkte im Punktprozess π gebildet wird. Den Markierungssatz können wir nun folgendermaßen formulieren.

Satz 9.8.2 (Markierungssatz)**.** π^* ist Poisson–Punktprozess auf $E_1 \times E_2$. Für dessen Intensitätsmaß μ^* gilt

$$\mu^*(C) = \iint_{(x,m) \in C} \mu(\mathrm{d}x)\lambda_x(\mathrm{d}m), \text{ für } C \subset E_1 \times E_2 \text{ Borel.}$$

Bemerkung 9.8.3. Die Formel für μ^* muss man folgendermaßen verstehen: Für eine Menge C der Form $A_1 \times A_2$ mit $A_1 \subset E_1$ und $A_2 \subset E_2$ Borel, gilt

$$\mu^*(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} \lambda_x(A_2)\mu(\mathrm{d}x).$$

Beweis. Sei $f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$ eine Borel–Funktion. Wir schreiben $S^* = \sum_{(x,m) \in \pi^*} f(x, m)$. Wir wollen zuerst den folgenden bedingten Erwartungswert berechnen:

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-S^*} | \pi] = \prod_{x \in \pi} \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-f(x, m_x)} | \pi] = \prod_{x \in \pi} \int_{E_2} \mathrm{e}^{-f(x,m)} \lambda_x(\mathrm{d}m).$$

Mit Hilfe einer einfachen Transformation lässt sich der obige Ausdruck wie folgt darstellen:

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-S^*} | \pi] = \prod_{x \in \pi} \int_{E_2} \mathrm{e}^{-f(x,m)} \lambda_x(\mathrm{d}m) = \exp\left\{ - \sum_{x \in \pi} - \log \int_{E_2} \mathrm{e}^{-f(x,m)} \lambda_x(\mathrm{d}m) \right\}.$$

Mit der Formel der totalen Erwartung folgt

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-S^*}] = \mathbb{E}_\pi \left[\exp \left\{ -\sum_{x\in\pi} f^*(x) \right\} \right]$$

mit

$$f^*(x) = -\log \int_{E_2} \mathrm{e}^{-f(x,m)} \lambda_x(\mathrm{d}m).$$

Mit Hilfe von Satz 9.7.3 lässt sich das wie folgt umformen:

$$\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-S^*}] = \exp \left\{ -\int_{E_1} (1-\mathrm{e}^{-f^*(x)}) \mu(\mathrm{d}x) \right\}.$$

Einsetzen von f^* liefert nun folgende Formel:

$$\exp \left\{ -\int_{E_1} (1-\mathrm{e}^{-f^*(x)}) \mu(\mathrm{d}x) \right\} = \exp \left\{ -\int_{E_1} \int_{E_2} (1-\mathrm{e}^{-f(x,m)}) \mu(\mathrm{d}x) \lambda(\mathrm{d}m) \right\}.$$

Mit $\mu^*(\mathrm{d}x, \mathrm{d}m) := \mu(\mathrm{d}x)\lambda(\mathrm{d}m)$ und mit Satz 9.7.7 folgt schließlich, das π^* ein Poisson–Punktprozess mit Intensitätsmaß μ^* ist. □

Beispiel 9.8.4. Sei $A \subset E_2$ eine Menge von Farben. Betrachte nun alle Punkte von π, die eine Farbe aus E_2 bekommen. Wir zeigen, dass diese Punkte einen Poisson–Punktprozess bilden. Nach dem Markierungssatz ist $\sum_{x\in\pi} \delta_{(x,m_x)}$ ein Poisson–Punktprozess auf $E_1 \times E_2$. Da die Einschränkung dieses Poisson–Punktprozesses auf die Teilmenge $E_1 \times A$ ebenfalls ein Poisson–Punktprozess ist, folgt, dass $\sum_{x\in\pi: m_x\in A} \delta_{(x,m_x)}$ ein Poisson–Punktprozess auf $E_1 \times A$ ist. Aus dem Abbildungssatz für die Projektion $(x,m) \mapsto x$ folgt, dass $\sum_{x\in\pi: m_x\in A} \delta_x$ ebenfalls ein Poisson–Punktprozess ist.