KAPITEL 5

# Max–Anziehungsbereiche

Es seien $X_1, X_2, ...$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $F$. Sei

$$M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Wir erinnern daran, dass $F$ im Max–Anziehungsbereich einer nichtdegenerierten Verteilungsfunktion $G$ liegt, wenn es Folgen $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} G.$$

Eine äquivalente Bedingung: Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n t + b_n) = G(t).$$

Als $G$ kommen nur Extremwertverteilungen in Frage. Diese wurden im Satz von Fisher–Tippett–Gnedenko beschrieben.

In diesem Kapitel werden wir die Max–Anziehungsbereiche der Verteilungen $\Phi_\alpha, \Psi_\alpha$ und $\Lambda$ beschreiben. Nicht alle Beweise in diesem Kapitel sind vollständig. Für mehr Einzelheiten verweisen wir auf die Bücher von S. Resnick *"Extreme Values, Regular Variation and Point Processes"*, L. de Haan, A. Ferreira *"Extreme Value Theory: An Introduction"*, N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels *"Regular Variation"*.

## 5.1. Max–Anziehungsbereich der Fréchet–Verteilung $\Phi_\alpha$

Der nächste Satz beschreibt den Max–Anziehungsbereich der Fréchet–Verteilung $\Phi_\alpha$, $\alpha > 0$.

**Satz 5.1.1** (Gnedenko, 1943)**.** Eine Verteilungsfunktion $F$ mit rechtem Endpunkt $x^*$ liegt im Max–Anziehungsbereich der Fréchet–Verteilung $\Phi_\alpha$ mit Parameter $\alpha > 0$ genau dann, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(1) $x^* = +\infty$.
(2) Die Tailfunktion $\bar{F}$ ist regulär variierend mit Index $-\alpha$, d.h.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - F(\lambda x)}{1 - F(x)} = \lambda^{-\alpha} \text{ für alle } \lambda > 0.$$

**Beispiel 5.1.2.** Pareto–Verteilung mit der Tailfunktion $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}$, $x > 1$, liegt im Max–Anziehungsbereich von $\Phi_\alpha$, denn $x^* = +\infty$ und $\bar{F} \in \mathrm{RV}_{-\alpha}$.

**Beispiel 5.1.3.** Eine beliebige Verteilungsfunktion, für die $\bar{F}(x) \sim Kx^{-\alpha}$ für $x \to +\infty$ gilt (wobei $K > 0$ und $\alpha > 0$), liegt im Max–Anziehungsbereich von $\Phi_\alpha$.

Wir beweisen zuerst die Rückrichtung von Satz 1.1.1. Dies geschieht im folgenden Satz.

**Satz 5.1.4.** Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $F$, für die $x^* = +\infty$ und $\bar{F} \in \mathrm{RV}_{-\alpha}$ gilt. Weiterhin sei $a_n$ eine beliebige Folge mit

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(a_n) = 1. \tag{5.1.1}$$

Dann gilt

$$\frac{M_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \Phi_\alpha.$$

Beweis. Gegeben ist, dass $x^* = +\infty$ und $\bar{F} \in \mathrm{RV}_{-\alpha}$. Wir zeigen, dass für alle $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n t) = \Phi_\alpha(t).$$

Schritt 1. Zuerst zeigen wir durch Widerspruch, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Hätte $a_n$ eine nach oben beschränkte Teilfolge, so wäre entlang dieser Teilfolge $\bar{F}(a_n)$ wegbeschränkt von 0 (wegen $x^* = +\infty$) und wir hätten dann $\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(a_n) = +\infty$. Widerspruch zu (1.1.1). Also gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Schritt 2. Sei $t > 0$. Da $\bar{F}$ regulär variierend mit Index $-\alpha$ ist, ergibt sich unter Berücksichtigung von (1.1.1), dass

$$n\bar{F}(a_n t) = n\bar{F}(a_n) \cdot \frac{\bar{F}(a_n t)}{\bar{F}(a_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \cdot t^{-\alpha} = t^{-\alpha}.$$

Dadurch folgt:

$$F^n(a_n t) = (1 - \bar{F}(a_n t))^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-t^{-\alpha}} = \Phi_\alpha(t).$$

Schritt 3. Sei $t \le 0$. Es gilt für hinreichend großes $n$, dass $a_n > 0$ (Schritt 1) und folglich

$$F^n(a_n t) \le F^n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = \Phi_\alpha(t),$$

wobei wir benutzt haben, dass $F(0) < 1$ wegen $x^* = +\infty$. □

Wir haben allerdings nicht gesagt, wie man eine Folge $a_n$ konstruiert, die (1.1.1) erfüllt. Am einfachsten definiert man $a_n$ als eine Lösung der Gleichung $\bar{F}(a_n) = \frac{1}{n}$. Leider kann es bei einer unstetigen Verteilungsfunktion $F$ sein, dass $\bar{F}$ den Wert $\frac{1}{n}$ überspringt und es somit keine Lösung gibt. Für eine Konstruktion, die immer funktioniert, benötigen wir den Begriff der Quantilfunktion.

**Definition 5.1.5.** Die **Quantilfunktion** (oder die **linksstetige Inverse**) einer Verteilungsfunktion $F$ ist die Funktion

$$F^{\leftarrow}(a) := \inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) \geq a\}, \qquad a \in (0,1).$$

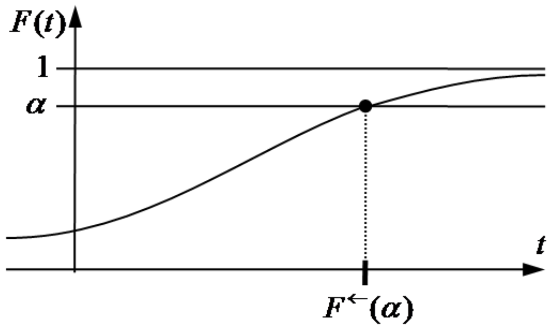


Abbildung 1. Veranschaulichung von $F^{\leftarrow}(a)$.

Ist die Funktion $F$ streng monoton steigend und stetig, so ist $F^{\leftarrow}$ die inverse Funktion zu Im Allgemeinen können aber zwei Arten von Problemen auftreten:

(1) Die Funktion $F$ kann auf einem Intervall konstant bleiben.
(2) Die Funktion $F$ kann Sprünge haben.

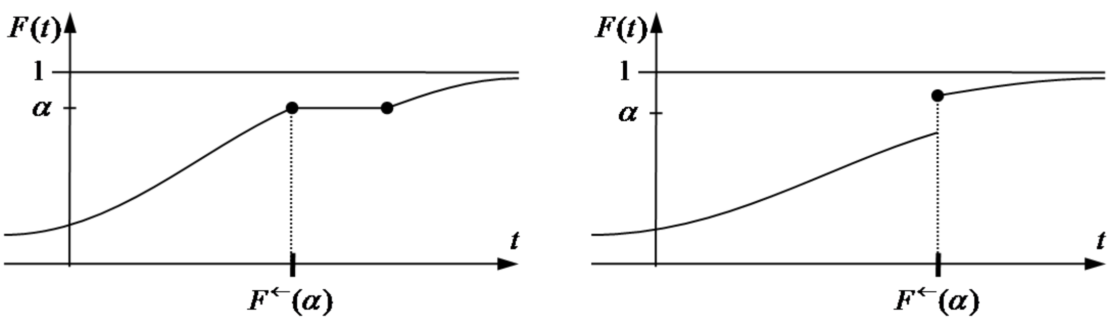


Abbildung 2. Problemfälle

In beiden Fällen ist die inverse Funktion zu $F$ nicht wohldefiniert. Die Quantilfunktion existiert aber trotzdem.

**Aufgabe 5.1.6.** Sei $F$ eine Verteilungsfunktion mit rechtem Endpunkt $x^*$.

(1) Zeigen Sie, dass $F^{\leftarrow}$ linksstetig und monoton nicht-fallend ist.
(2) Zeigen Sie, dass $\lim_{y\uparrow 1} F^{\leftarrow}(y) = x^*$.

Abbildung 2, rechts, zeigt, dass $F(F^{\leftarrow}(y))$ nicht immer gleich $y$ sein muss. Es gilt lediglich eine einseitige Abschätzung:

**Lemma 5.1.7.** Es gilt $F(F^{\leftarrow}(y)) \geq y$ für alle $y \in (0,1)$.

Beweis. Sei $x = F^{\leftarrow}(y)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $F(x+\varepsilon) \geq y$ nach Definition von $F^{\leftarrow}$. Lassen wir $\varepsilon$ gegen Null gehen, so gilt $F(x+\varepsilon) \to F(x)$, weil $F$ als Verteilungsfunktion rechtsstetig ist. Daraus ergibt sich, dass $F(x) \geq y$. □

Nun können wir eine Normierungsfolge $a_n$ angeben, die der Bedingung aus Satz 1.1.4 genügt:

$$a_n := F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

**Lemma 5.1.8.** Sei $x^* = +\infty$ und $\bar{F} \in \mathrm{RV}_{-\alpha}$. Mit der obigen Wahl von $a_n$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(a_n) = 1.$$

Beweis. Ist $F$ streng monoton steigend und stetig, so gilt $F(a_n) = 1 - \frac{1}{n}$, denn $F^{\leftarrow}$ ist dann die inverse Funktion von $F$. In diesem Fall ist die Aussage des Lemmas gültig, denn es ist sogar $n\bar{F}(a_n) = 1$. Im Fall eines beliebigen $F$ müssen wir anders argumentieren.

Schritt 1. Aus Lemma 1.1.7 folgt, dass $\bar{F}(a_n) \leq \frac{1}{n}$, woraus sich direkt ergibt, dass

$$\limsup_{n\to\infty} n\bar{F}(a_n) \leq 1. \tag{5.1.2}$$

Schritt 2. Es bleibt also noch zu zeigen, dass

$$\liminf_{n\to\infty} n\bar{F}(a_n) \geq 1. \tag{5.1.3}$$

Sei dazu $x \in (0,1)$. Für $n$ groß genug gilt $xa_n > 0$, denn $a_n \to \infty$. Es gilt außerdem $F(xa_n) < 1 - \frac{1}{n}$ nach Definition von $a_n$. Somit gilt:

$$n\bar{F}(xa_n) = n(1 - F(xa_n)) > n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

Damit folgt unmittelbar:

$$n\bar{F}(a_n) = n\bar{F}(xa_n) \cdot \frac{\bar{F}(a_n)}{\bar{F}(xa_n)} > \frac{\bar{F}(a_n)}{\bar{F}(xa_n)} \to x^{\alpha}, \qquad n \to \infty,$$

da $\bar{F}$ regulär variierend mit Index $-\alpha$ ist. Es ergibt sich also, dass $\liminf_{n\to\infty} n\bar{F}(a_n) \geq x^{\alpha}$ für alle $x \in (0,1)$. Wenn man nun $x$ gegen 1 gehen lässt, ergibt sich (1.1.3). Damit ist insgesamt $\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(a_n) = 1$ und das Lemma ist bewiesen. □

Hier sind einige Beispiele von Verteilungen aus dem Max–Anziehungsbereich der Fréchet–Verteilung.

**Aufgabe 5.1.9.** In der Versicherungsmathematik wird für die Modellierung der Schadenhöhen manchmal die sogenannte Burr–Verteilung mit Verteilungsfunktion

$$F(t) = 1 - \left(\frac{C}{C + t^\beta}\right)^\alpha, \quad t \geq 0,$$

verwendet. Dabei sind $C > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ Parameter. Zeigen Sie, dass die Burr–Verteilung im Max–Anziehungsbereich der Fréchet–Verteilung $\Phi_{\alpha\beta}$ liegt, und geben Sie explizit eine Folge $a_n$ an, für die $M_n/a_n$ gegen $\Phi_{\alpha\beta}$ konvergiert.

**Aufgabe 5.1.10.** Sei $X$ eine Zufallsvariable mit Dichte $f$ und Verteilungsfunktion $F$. Beweisen Sie: Gilt $f(t) \sim Kt^{-\alpha}$, $t \to +\infty$, mit $K > 0$ und $\alpha > 1$, so folgt

$$\bar{F}(t) \sim \frac{K}{\alpha - 1} t^{1-\alpha}, \qquad t \to +\infty.$$

Zeigen Sie, dass $X$ im Max–Anziehungsbereich von $\Phi_{\alpha-1}$ liegt.

**Aufgabe 5.1.11.** Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und Cauchy–verteilt mit der Dichte

$$f(t) = \frac{1}{\pi(1 + t^2)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $\frac{\pi}{n} M_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \Phi_1$.

Auch diskrete Verteilungen können im Max–Anziehungsbereich der Fréchet–Verteilung liegen:

**Aufgabe 5.1.12.** Eine Zufallsvariable $X$ heißt Zeta–verteilt mit Parameter $\alpha > 1$, wenn

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{1}{\zeta(\alpha) k^\alpha}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

wobei $\zeta(\alpha) := \sum_{k=1}^\infty k^{-\alpha}$ die Zeta–Funktion ist. Zeigen Sie, dass die Zeta–Verteilung im Max–Anziehungsbereich von $\Phi_{\alpha-1}$ liegt.

Nun beweisen wir die Hinrichtung von Satz 1.1.1.

Beweis von Satz 1.1.1: "$\Rightarrow$". Es sei $F$ eine Verteilungsfunktion und $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ Folgen, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n t + b_n) = \Phi_\alpha(t). \tag{5.1.4}$$

Wir zeigen, dass $x^* = +\infty$ und $\bar{F} \in \mathrm{RV}_{-\alpha}$.

Schritt 1. Zuerst müssen wir (1.1.4) auf nichtganzzahlige Werte von $n$ erweitern. Für ein nicht notwendigerweise ganzzahliges $s \geq 0$ definiere $a_s = a_{\lfloor s \rfloor}$ und $b_s = b_{\lfloor s \rfloor}$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{s\to\infty} F^s(a_s t + b_s) = \Phi_\alpha(t), \tag{5.1.5}$$

wobei $s$ nicht ganzzahlig sein muss. In der Tat,

$$F^s(a_s t + b_s) = (F^{\lfloor s \rfloor}(a_{\lfloor s \rfloor} t + b_{\lfloor s \rfloor}))^{s/\lfloor s \rfloor} \xrightarrow[s\to\infty]{} \Phi_\alpha(t),$$

wobei wir (1.1.4) mit $n = \lfloor s \rfloor$ und die Relation $\lim_{s\to+\infty} s/\lfloor s \rfloor = 1$ benutzt haben.

Schritt 2. Sei $\lambda > 0$. Wegen (1.1.5) mit $\lambda s$ anstelle von $s$ gilt

$$\lim_{s\to\infty} F^s(a_{\lambda s}t + b_{\lambda s}) = \lim_{s\to\infty} (F^{\lambda s}(a_{\lambda s}t + b_{\lambda s}))^{1/\lambda} = \Phi_\alpha^{1/\lambda}(t) = \Phi_\alpha(\lambda^{1/\alpha}t). \tag{5.1.6}$$

Indem wir nun (1.1.5) mit (1.1.6) vergleichen und das Lemma von Chintschin benutzen, erhalten wir, dass

$$\lim_{s\to\infty} \frac{a_{\lambda s}}{a_s} = \lambda^{1/\alpha}, \quad \lim_{s\to\infty} \frac{b_{\lambda s} - b_s}{a_s} = 0. \tag{5.1.7}$$

Somit ist die Funktion $s \mapsto a_s$ regulär variierend mit Index $1/\alpha$.

Schritt 3. Wir werden nun (1.1.7) benutzen, um zu zeigen, dass

$$\lim_{s\to\infty} \frac{b_s}{a_s} = 0 \tag{5.1.8}$$

Sei $\varepsilon > 0$ fest. Sei $A$ so groß, dass

$$\frac{a_{x/\lambda}}{a_x} < 2\lambda^{-\alpha/2} \text{ für alle } x \geq A, \quad \lambda > 1 \tag{5.1.9}$$

(das folgt aus der Potter–Schranke für die regulär variierende Funktion $x \mapsto a_x$) und

$$\left| \frac{b_{2x} - b_x}{a_x} \right| < \varepsilon \text{ für alle } x \geq A \tag{5.1.10}$$

(das folgt aus der zweiten Relation in (1.1.7)). Für ein $s > A$ können wir ein $n = n(s) \in \mathbb{N}_0$ finden mit $s/2^{n+1} \leq A < s/2^n$. Wir erhalten die Abschätzung

$$\left| \frac{b_s}{a_s} \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{b_{s/2^{k-1}} - b_{s/2^k}}{a_{s/2^k}} \right| \frac{a_{s/2^k}}{a_s} + \frac{b_{s/2^n}}{a_s} \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 2^{-\alpha k/2} + \frac{C_1}{a_s},$$

wobei wir im zweiten Schritt (1.1.9) und (1.1.10) benutzt haben, sowie die Tatsache, dass $s/2^n \in [A, 2A]$ und somit $|b_{s/2^n}| < C_1$ für eine Konstante $C_1$. Da $a_s \to \infty$ für $s \to \infty$ (denn $a_s$ ist regulär variierend mit positivem Index), ergibt sich

$$\limsup_{s\to\infty} \left| \frac{b_s}{a_s} \right| \leq 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\alpha k/2}.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig und die Summe auf der rechten Seite endlich ist, erhalten wir (1.1.8).

Schritt 4. Wegen (1.1.8) und des Chintschin–Lemmas können wir nun (1.1.4) wie folgt vereinfachen: Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n t) = \Phi_\alpha(t). \tag{5.1.11}$$

Wir zeigen, dass $x^* = +\infty$. Sei $t > 0$. Wäre $x^*$ endlich, so wäre $a_n t > x^*$ für $n$ groß genug und wir hätten $F^n(a_n t) = 1$ für $n$ groß genug, was in einem Widerspruch zu (1.1.11) steht. Also ist $x^* = +\infty$.

Schritt 5. Durch Logarithmieren ergibt sich aus (1.1.11), dass für alle $t > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} n \log F(a_n t) = -t^{-\alpha}.$$

Dies kann man auch wie folgt umschreiben: Für alle $t > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} n \log(1 - \bar{F}(a_n t)) = -t^{-\alpha}.$$

Da $a_n \to \infty$ (wegen der regulären Variation) und somit $\bar{F}(a_n t) \to 0$, können wir die Formel $\log(1 - x) = -x + o(x)$ verwenden. Es ergibt sich, dass für alle $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(a_n t) = t^{-\alpha}. \tag{5.1.12}$$

Schritt 6. Schließlich zeigen wir unter Benutzung von (1.1.12), dass $\bar{F}$ regulär variierend mit Index $-\alpha$ ist. Sei dazu $\lambda > 0$. Für $x > 0$ definiere

$$n(x) := \inf\{m \in \mathbb{N} \colon a_{m+1} > x\}.$$

Wegen $a_n \to +\infty$ ist $n(x)$ wohldefiniert. Es gilt $a_{n(x)} \le x < a_{n(x)+1}$ und $\lim_{x\to\infty} n(x) = \infty$. Da $\bar{F}$ außerdem monoton nichtsteigend ist, folgt daraus die Abschätzung

$$\frac{\bar{F}(\lambda x)}{\bar{F}(x)} \le \frac{\bar{F}(\lambda a_{n(x)})}{\bar{F}(a_{n(x)+1})} = \frac{\bar{F}(\lambda a_{n(x)}) n(x)}{\bar{F}(a_{n(x)+1})(n(x)+1)} \cdot \frac{n(x)+1}{n(x)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^{-\alpha}}{1} \cdot 1 = \lambda^{-\alpha},$$

wobei wir im letzten Schritt (1.1.12) zweimal benutzt haben. Daraus ergibt sich

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(\lambda x)}{\bar{F}(x)} \le \lambda^{-\alpha}.$$

Der Beweis der unteren Abschätzung ist analog. □

## 5.2. Max–Anziehungsbereich der Weibull–Verteilung $\Psi_\alpha$

Der Max–Anziehungsbereich der Weibull–Verteilung $\Psi_\alpha$ hat eine ähnliche Charakterisierung wie der Max–Anziehungsbereich der Fréchet–Verteilung. Der Unterschied ist, dass im Fall der Weibull–Verteilung der rechte Endpunkt $x^*$ endlich sein muss. Damit eine Verteilungsfunktion $F$ im Max–Anziehungsbereich von $\Psi_\alpha$ liegt, muss $\bar{F}$ an der Stelle $x^*$ regulär variierend sein. Wir geben nun eine präzise Definition.

**Definition 5.2.1.** Eine messbare Funktion $f : (0, A) \to (0, \infty)$ heißt **regulär variierend in** 0 mit Index $\alpha \in \mathbb{R}$, falls

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^\alpha \text{ für alle } \lambda > 0.$$

Bezeichnung: $f \in \mathrm{RV}_\alpha(0)$.

**Beispiel 5.2.2.** Die Funktion $f(x) = x^\alpha$ ist regulär variierend in 0 mit Index $\alpha$.

**Aufgabe 5.2.3.** Zeigen Sie: $f(x)$ ist regulär variierend mit Index $\alpha$ an der Stelle 0 genau dann, wenn $1/f(1/x)$ regulär variierend mit Index $\alpha$ (an der Stelle $+\infty$) ist.

Der nächste Satz charakterisiert den Max–Anziehungsbereich der Weibull–Verteilung.

**Satz 5.2.4** (Gnedenko, 1943)**.** Eine Verteilungsfunktion $F$ mit rechtem Endpunkt $x^*$ liegt im Max–Anziehungsbereich der Weibull–Verteilung $\Psi_\alpha$ mit Parameter $\alpha > 0$ genau dann, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(1) $x^* < \infty$.
(2) Die Funktion $x \mapsto \bar{F}(x^* - x)$, $x > 0$, ist regulär variierend in 0 mit Index $\alpha$, d.h.

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1 - F(x^* - \lambda x)}{1 - F(x^* - x)} = \lambda^\alpha \text{ für alle } \lambda > 0.$$

**Bemerkung 5.2.5.** Sind die beiden Bedingungen von Theorem 1.2.4 erfüllt, so werden wir zeigen, dass

$$\frac{M_n - x^*}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \Psi_\alpha,$$

wobei $a_n$ eine beliebige Folge mit

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(x^* - a_n) = 1 \tag{5.2.1}$$

ist. Ein Beispiel einer solchen Folge $a_n$ ist gegeben durch

$$a_n = x^* - F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

**Beispiel 5.2.6.** Betrachte die Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - (x^* - x)^\alpha$ mit $x \in (x^* - 1, x^*)$, wobei $\alpha > 0$. Dann ist $1 - F(x^* - x) = x^\alpha \in \mathrm{RV}_\alpha(0)$. Somit liegt $F$ im $\mathrm{MDA}(\Psi_\alpha)$.

**Beispiel 5.2.7.** Eine Verteilungsfunktion $F$ mit endlichem rechten Endpunkt $x^*$, für die $\bar{F}(x^* - x) \sim Kx^\alpha$ für $x \downarrow 0$ gilt (wobei $K > 0$, $\alpha > 0$), liegt im Max–Anziehungsbereich von $\Psi_\alpha$.

Wir beweisen nur die Rückrichtung von Satz 1.2.4. Der Beweis der Hinrichtung benutzt ähnliche Ideen wie im Fréchet–Fall.

Beweis von Satz 1.2.4: "$\Leftarrow$". Sei $x < 0$. Es gilt

$$\mathbb{P}\left[\frac{M_n - x^*}{a_n} \le x\right] = F^n(a_n x + x^*) = (1 - \bar{F}(a_n x + x^*))^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-(-x)^\alpha} = \Psi_\alpha(x),$$

denn

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(a_n x + x^*) = \lim_{n\to\infty} n\bar{F}(x^* - a_n) \cdot \frac{\bar{F}(x^* - a_n(-x))}{\bar{F}(x^* - a_n)} = (-x)^\alpha.$$

Dabei haben wir die reguläre Variation von $\bar{F}(x^* - x)$ an der Stelle $x = 0$ und (1.2.1) benutzt.

Sei $x \ge 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}\left[\frac{M_n - x^*}{a_n} \le x\right] = F^n(a_n x + x^*) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 = \Psi_\alpha(x),$$

denn $M_n \le x^*$ f.s. $\square$

Hier sind einige Beispiele von Verteilungen aus dem Max–Anziehungsbereich der Weibull–Verteilung.

**Aufgabe 5.2.8.** Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit Beta$(\alpha, \beta)$–Verteilung, d.h. die Dichte von $X_i$ sei gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}, & \text{für } t \in [0,1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} \mathrm{d}t$ die Eulersche Beta–Funktion und $\alpha > 0$, $\beta > 0$ sind Parameter. Geben Sie explizit eine Folge $c_n > 0$ an mit

$$c_n(M_n - 1) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \Psi_\beta.$$

**Aufgabe 5.2.9.** Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig und standardnormalverteilt. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen $-|X_i|$ im Max–Anziehungsbereich von $\Psi_1$ liegen. Geben Sie explizit eine Folge $c_n > 0$ an mit

$$c_n \min\{|X_1|, \dots, |X_n|\} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{Exp}(1).$$

## 5.3. Max–Anziehungsbereich der Gumbel–Verteilung $\Lambda$

Eine Theorie des Max–Anziehungsbereiches der Gumbel–Verteilung wurde von L. de Haan entwickelt. In diesem Skript werden wir auf diese Theorie nicht eingehen und verweisen stattdessen auf die Bücher von L. de Haan *“On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes”*, N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels *“Regular Variation”* und S. Resnick *“Extreme Values, Regular Variation and Point Processes”*. Wir beweisen nur ein einfaches Resultat.

**Satz 5.3.1** (Gnedenko, 1943)**.** Eine Verteilungsfunktion $F$ mit rechtem Endpunkt $x^*$ liegt im Max–Anziehungsbereich der Gumbel–Verteilung $\Lambda(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$ genau dann, wenn es eine positive und messbare Funktion $g(x)$ gibt mit

$$\lim_{x\uparrow x^*} \frac{\bar{F}(x + ug(x))}{\bar{F}(x)} = \mathrm{e}^{-u} \text{ für alle } u \in \mathbb{R}. \tag{5.3.1}$$

**Bemerkung 5.3.2.** $x^*$ kann im Gumbel–Fall endlich oder unendlich sein, Beispiele werden unten gegeben.

**Bemerkung 5.3.3.** Wir werden zeigen: Ist die Bedingung (1.3.1) erfüllt, so gilt

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}},$$

wobei $a_n$ und $b_n$ Folgen sind, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(b_n) = 1, \quad a_n = g(b_n). \tag{5.3.2}$$

Eine mögliche Wahl von $b_n$ ist $b_n = F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ (Beweis ähnlich wie in Lemma 1.1.8).

Beweis von Satz 1.3.1. Es wird hier nur ein Beweis für die Rückrichtung gegeben. Es seien also (1.3.1) und (1.3.2) erfüllt. Es gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = x^*$, denn hätte $b_n$ eine von $x^*$ wegbeschränkte Teilfolge, so würde entlang dieser Teilfolge (1.3.2) verletzt sein. Man betrachte nun

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(a_n u + b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\bar{F}(b_n + g(b_n)u)}{\bar{F}(b_n)} \cdot n\bar{F}(b_n) = \mathrm{e}^{-u},$$

wobei wir (1.3.1) und (1.3.2) benutzt haben. Es folgt

$$\mathbb{P}\left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \le u\right] = F^n(a_n u + b_n) = (1 - \bar{F}(a_n u + b_n))^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-u}}.$$

Und dadurch ergibt sich $\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \Lambda$. □

**Beispiel 5.3.4.** Die Exponentialverteilung $\operatorname{Exp}(\lambda)$ mit Tailfunktion

$$\bar{F}(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

liegt im Max–Anziehungsbereich von $\Lambda$. Man kann nachrechnen, dass Bedingung (1.3.1) mit $g(x) = \frac{1}{\lambda}$ erfüllt ist:

$$\frac{\bar{F}(x + ug(x))}{\bar{F}(x)} = \mathrm{e}^{-\lambda u g(x)} = \mathrm{e}^{-u}.$$

Aus (1.3.2) ergibt sich (als eine mögliche Wahl) $b_n = \frac{\log n}{\lambda}$ und $a_n = \frac{1}{\lambda}$, so dass

$$\lambda M_n - \log n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \Lambda.$$

Einige weitere Beispiele von Verteilungen aus dem Max–Anziehungsbereich der Gumbel–Verteilung $\Lambda$ finden sich in den nachfolgenden Aufgaben.

**Aufgabe 5.3.5.** Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Tailfunktion

$$\bar{F}(t) = \mathrm{e}^{-t^{\alpha}}, \quad t > 0,$$

wobei $\alpha > 0$. Geben Sie explizit $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ mit $(M_n - b_n)/a_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \Lambda$ an.

**Aufgabe 5.3.6.** Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Tailfunktion

$$\bar{F}(t) = \mathrm{e}^{-(\log t)^{\alpha}}, \quad t > 1,$$

wobei $\alpha > 1$. Geben Sie explizit $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ mit $(M_n - b_n)/a_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \Lambda$ an.

Die nächste Aufgabe zeigt, dass im Max–Anziehungsbereich der Gumbel–Verteilung der rechte Endpunkt auch endlich sein kann.

**Aufgabe 5.3.7.** Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Tailfunktion

$$\bar{F}(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{1/t}, & t < 0, \\ 0, & t \ge 0. \end{cases}$$

Geben Sie explizit $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ mit $(M_n - b_n)/a_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \Lambda$ an.

Alle drei Max–Anziehungsbereiche sind abgeschlosses bzgl. der asymptotischen Äquivalenz:

**Aufgabe 5.3.8.** Es seien $F$ und $G$ zwei Verteilungsfunktionen mit dem gleichen rechten Endpunkt $x^*$ und

$$\lim_{x\uparrow x^*} \frac{1 - F(x)}{1 - G(x)} = c,$$

wobei $0 < c < \infty$. Zeigen Sie: Liegt $F$ im Max-Anziehungsbereich von $\Phi_\alpha$, $\Psi_\alpha$ oder $\Lambda$, so liegt auch $G$ in demselben Max–Anziehungsbereich.

Es gibt Verteilungen, die in keinem Max–Anziehungsbereich liegen:

**Aufgabe 5.3.9.** Die Zufallsvariable $X$ sei geometrisch verteilt mit Parameter $1/2$, d.h.

$$\mathbb{P}[X = k] = 1/2^k, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Zeigen Sie, dass $X$ in keinem der drei Max-Anziehungsbereiche liegt.

**Aufgabe 5.3.10.** Die Zufallsvariable $Y$ besitze die Tailfunktion

$$\bar{F}(t) = 1/\log t, \quad t > \mathrm{e}.$$

Zeigen Sie, dass $Y$ in keinem der drei Max-Anziehungsbereiche liegt.

## 5.4. Beispiel: Normalverteilung

Im Folgenden werden wir zeigen, dass die Normalverteilung zum Max–Anziehungsbereich der Gumbel–Verteilung gehört. Dazu benötigen wir ein Lemma, das die Asymptotik der Tailfunktion der Standardnormalverteilung beschreibt. Wir erinnern daran, dass die Notation $f(t) \sim g(t)$ für $t \to +\infty$ bedeutet, dass

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1.$$

**Lemma 5.4.1.** Für die Tailfunktion $\bar{F}$ und die Dichte $f$ der Standardnormalverteilung gilt

$$\bar{F}(t) \sim \frac{f(t)}{t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t} \mathrm{e}^{-t^2/2} \text{ für } t \to +\infty.$$

Beweis. Es gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\bar{F}(t)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}t}\mathrm{e}^{-t^2/2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_t^\infty \mathrm{e}^{-s^2/2} ds}{\frac{1}{t}\mathrm{e}^{-t^2/2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-t^2/2}}{-\frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2/2} - t\frac{1}{t}\mathrm{e}^{-t^2/2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{t^2} + 1} = 1,$$

wobei wir den Satz von L'Hospital für den Fall „$\frac{0}{0}$“ angewendet haben. ∎

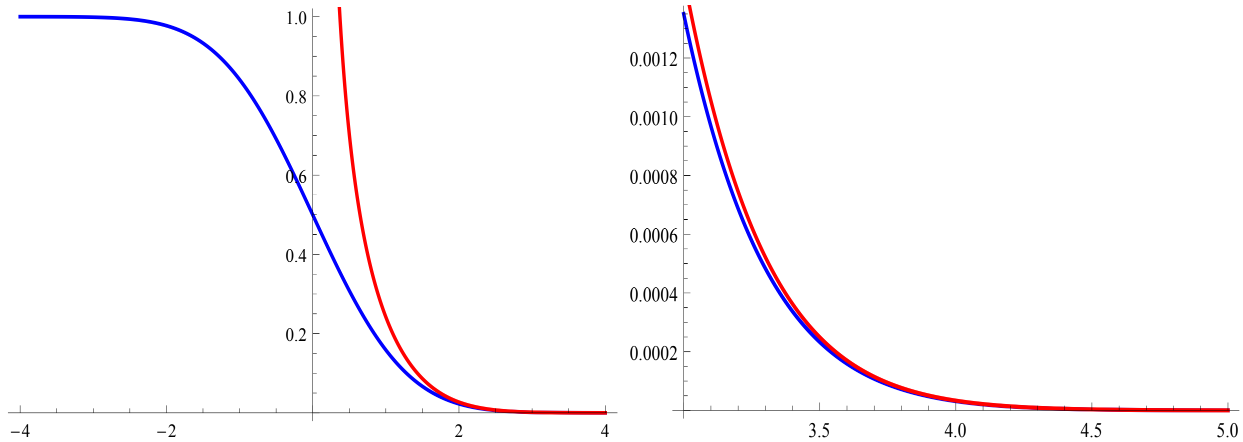


ABBILDUNG 3. Veranschaulichung von Lemma 1.4.1. Blaue Kurve: Die Tailfunktion $\bar{F}$ der Standardnormalverteilung. Rote Kurve: Die Approximation. Das rechte Bild zeigt die beiden Kurven auf dem Intervall $[3, 5]$.

**Satz 5.4.2.** Die Standardnormalverteilung liegt im Max–Anziehungsbereich der Gumbel–Verteilung $\Lambda$.

BEWEIS. Wir werden zeigen, dass Bedingung (1.3.1) des Satzes 1.3.1 mit $g(t) = 1/t$ gilt. Mit Lemma 1.4.1 ergibt sich:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\bar{F}(t+xg(t))}{\bar{F}(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{1}{t+xg(t)} \mathrm{e}^{-(t+xg(t))^2/2}}{\frac{1}{t}\mathrm{e}^{-t^2/2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{t+x/t} \mathrm{e}^{-t^2/2-x-\frac{x^2}{2t^2}}}{\frac{1}{t}\mathrm{e}^{-t^2/2}} = \mathrm{e}^{-x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige und standardnormalverteilte Zufallsvariablen und $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Wir werden nun die Folgen $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ so bestimmen, dass

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}.$$

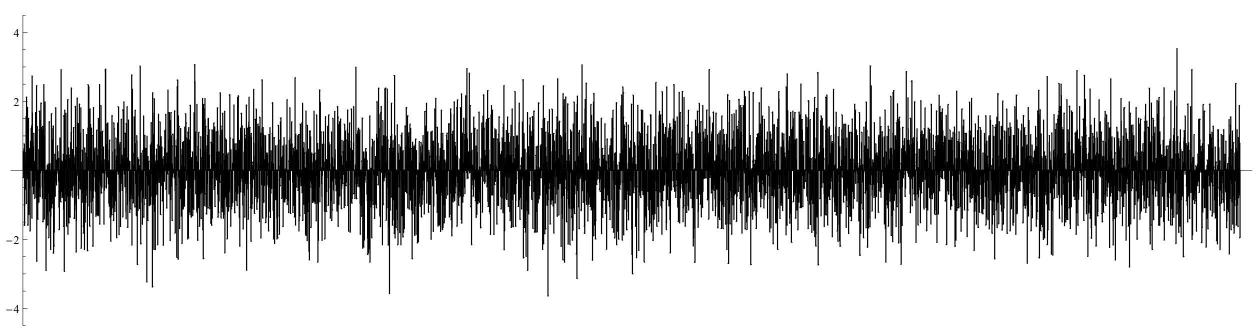


ABBILDUNG 4. Eine standardnormalverteilte Stichprobe vom Umfang $n = 5000$.

Laut Satz 1.3.1 sollten wir $b_n$ so wählen, dass

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(b_n) = 1. \tag{5.4.1}$$

Damit das gilt, muss die Folge $b_n$ gegen $+\infty$ divergieren. Hätte nämlich die Folge $b_n$ eine nach oben beschränkte Teilfolge, so wäre $\bar{F}(b_n)$ entlang dieser Teilfolge von 0 wegbeschränkt sein und $n\bar{F}(b_n)$ würde entlang dieser Teilfolge gegen unendlich gehen. Widerspruch, also geht $b_n$ gegen $+\infty$.

Wir können nun Lemma 1.4.1 benutzen und (1.4.1) in der folgenden Form schreiben:

$$\sqrt{2\pi} b_n \mathrm{e}^{b_n^2/2} \sim n, \qquad n \to \infty. \tag{5.4.2}$$

Auf der linken Seite ist $\mathrm{e}^{b_n^2/2}$ derjenige Term, der am schnellsten gegen $+\infty$ geht. Wir können also als eine erste Annäherung zu $b_n$ eine Folge $w_n$ mit $\mathrm{e}^{w_n^2/2} = n$ wählen, d.h.

$$w_n = \sqrt{2\log n}.$$

Mit der Folge $w_n$ sind wir aber noch nicht am Ziel, denn

$$\sqrt{2\pi} w_n \mathrm{e}^{w_n^2/2} = \sqrt{2\pi}\sqrt{2\log n}\, n \nsim n.$$

Wir machen also den Ansatz $b_n = \sqrt{2\log n} + \delta_n$, wobei $\delta_n$ noch genauer spezifiziert werden muss. Mit diesem Ansatz gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} b_n \mathrm{e}^{b_n^2/2} &= \sqrt{2\pi}(\sqrt{2\log n} + \delta_n)\mathrm{e}^{\log n + \sqrt{2\log n}\delta_n + \frac{\delta_n^2}{2}} \\ &= n \cdot \sqrt{2\pi}(\sqrt{2\log n} + \delta_n)\mathrm{e}^{\sqrt{2\log n}\delta_n}\mathrm{e}^{\frac{\delta_n^2}{2}}. \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

Wir wollen $\delta_n$ so bestimmen, dass alle Terme auf der rechten Seite außer $n$ asymptotisch äquivalent zu 1 sind. Wähle $\delta_n$ so dass

$$\sqrt{2\pi}\sqrt{2\log n}\,\mathrm{e}^{\sqrt{2\log n}\delta_n} = 1.$$

Dann folgt durch Umformungen, dass

$$\delta_n = -\frac{\log(4\pi\log n)}{2\sqrt{2\log n}}.$$

Es sei bemerkt, dass ein so gewähltes $\delta_n$ gegen 0 geht. Somit gilt

$$\mathrm{e}^{\delta_n^2} \sim 1, \quad \sqrt{2\log n} + \delta_n \sim \sqrt{2\log n}.$$

Also ist die rechte Seite von (1.4.3) tatsächlich asymptotisch äquivalent zu 1, wie gewünscht. Wir kommen also zum Schluss, dass $b_n$ wie folgt gewählt werden sollte:

$$b_n = \sqrt{2\log n} - \frac{\log(4\pi\log n)}{2\sqrt{2\log n}}. \tag{5.4.4}$$

Als $a_n$ wählt man schließlich $a_n = g(b_n) = \frac{1}{b_n}$. Da aber $b_n \sim \sqrt{2\log n}$, kann man mit dem Lemma von Chintschin zeigen, dass auch die folgende einfachere Wahl von $a_n$ reicht:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\log n}}. \tag{5.4.5}$$

Wir haben somit den folgenden Satz bewiesen:

**Satz 5.4.3.** Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\sqrt{2\log n}\left\{M_n - \left(\sqrt{2\log n} - \frac{\log(4\pi\log n)}{2\sqrt{2\log n}}\right)\right\} \le x\right] = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}.$$

**Bemerkung 5.4.4.** Der Satz lässt sich wie folgt interpretieren: Das Maximum $M_n$ nimmt Werte an, die sehr nahe bei $b_n = \sqrt{2\log n} - \frac{\log(4\pi\log n)}{2\sqrt{2\log n}}$ sind. Die Differenz zwischen $M_n$ und $b_n$ ist zufällig und hat die Größenordnung $a_n = \frac{1}{\sqrt{2\log n}}$. Multipliziert man $M_n - b_n$ mit dem Faktor $\sqrt{2\log n}$, so erhält man eine approximativ Gumbel–verteilte Zufallsvariable.

Zum Schluss werden wir noch zeigen, dass auch die sogenannte Log–Normalverteilung im Max–Anziehungsbereich der Gumbel–Verteilung liegt.

**Definition 5.4.5.** Es sei $X$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Dann heißt die Zufallsvariable $Y := \mathrm{e}^X$ **log–normalverteilt**.

Die Begriff log-normal erklärt sich dadurch, dass die Zufallsvariable $X = \log Y$ normalverteilt ist.

**Aufgabe 5.4.6.** Zeigen Sie, dass die Dichte einer log–normalverteilten Zufallsvariable durch die folgende Formel gegeben ist:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}y}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\log^2 y}, \quad y > 0.$$

**Satz 5.4.7.** Es seien $Y_1, Y_2, \ldots$ unabhängige, log–normalverteilte Zufallsvariablen. Sei

$$L_n := \max\{Y_1, \ldots, Y_n\}.$$

Mit $a_n$ und $b_n$ wie in Formeln (1.4.4) und (1.4.5) gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{L_n - \mathrm{e}^{b_n}}{a_n \mathrm{e}^{b_n}} \le x\right] = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}.$$

Beweis. Wir können annehmen, dass $Y_1 = \mathrm{e}^{X_1}, Y_2 = \mathrm{e}^{X_2}, \ldots$, wobei $X_1, X_2 \ldots$ unabhängig und standardnormalverteilt sind. Sei $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, dann ist $L_n = \mathrm{e}^{X_n}$. Wir wissen bereits, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[M_n - b_n \le a_n x\right] = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}.$$

Durch die Anwendung der Exponentialfunktion folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\mathrm{e}^{-b_n} L_n \le \mathrm{e}^{a_n x}\right] = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}.$$

Da $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, können wir die Entwicklung $\mathrm{e}^{a_n x} = 1 + a_n x + o(a_n)$ benutzen und es folgt (Übungsaufgabe: Zeigen Sie, dass man den $o$-term weglassen kann), dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\mathrm{e}^{-b_n} L_n \leq 1 + a_n x\right] = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. □

Die Gammaverteilung und die Log–Gammaverteilung liegen ebenfalls im Max–Anziehungsbereich der Gumbel–Verteilung.

> **Aufgabe 5.4.8.** Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Gamma$(\alpha, \lambda)$–verteilte Zufallsvariablen, d.h. die Dichte von $X_i$ sei
>
> $$f(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad t > 0,$$
>
> wobei $\alpha > 0$, $\lambda > 0$. Geben Sie explizit $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ mit $(M_n - b_n)/a_n \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} \Lambda$ an.

> **Aufgabe 5.4.9.** Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und Log–Gammaverteilt, d.h. $\log X_i$ seien Gamma$(\alpha, \lambda)$–verteilt. Geben Sie explizit $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ mit $(M_n - b_n)/a_n \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} \Lambda$ an.

## 5.5. Von Mises–Bedingungen

Wir haben notwendige und hinreichende Bedingungen dafür hergeleitet, dass eine Verteilung in einem Max–Anziehungsbereich liegt. Leider sind diese Bedingungen manchmal schwer zu überprüfen. In diesem Abschnitt leiten wir einfach zu überprüfende hinreichende Bedingungen, die allerdings nicht notwendig sind.

Zuerst müssen wir den Begriff "Ausfallrate" einführen. Man betrachte ein Gerät, dessen Lebensdauer als eine Zufallsvariable $Z \geq 0$ modelliert werde. Wir nehmen an, dass $Z$ absolut stetig mit Dichte $f$ ist. Wir bezeichnen die Verteilungsfunktion von $Z$ mit $F$. Es sei $\mathrm{d}x$ ein sehr kleines Zeitintervall. Wir stellen uns die folgende Frage:

> Gegeben, dass das Gerät zum Zeitpunkt $x$ noch funktioniert, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zwischen $x$ und $x + \mathrm{d}x$ ausfällt?

Diese bedingte Wahrscheinlichkeit kann wie folgt berechnet werden:

$$\mathbb{P}[Z \in (x, x+\mathrm{d}x) | Z > x] = \frac{\mathbb{P}[Z \in (x, x+\mathrm{d}x), Z > x]}{\mathbb{P}[Z > x]} = \frac{\mathbb{P}[Z \in (x, x+\mathrm{d}x)]}{\mathbb{P}[Z > x]} \approx \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} \mathrm{d}x.$$

Die Funktion $h(x) = f(x)/\bar{F}(x)$ heißt die **Ausfallrate** des Geräts.

Im obigen Beispiel ist die Lebensdauer des Geräts nicht-negativ. Die Definition der Ausfallrate kann allerdings auch für Zufallsvariablen verwendet werden, die negative Werte annehmen dürfen. Für die folgende Definition sei $Z$ eine Zufallsvariable mit rechtem Endpunkt $x^*$, deren Verteilungsfunktion $F$ auf einem Intervall $(x_0, x^*)$ eine stetige Ableitung $f = F'$ besitzt.

**Definition 5.5.1.** Die **Ausfallrate** von $Z$ ist die Funktion

$$h(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = -(\log \bar{F})'(x), \quad x \in (x_0, x^*).$$

**Beispiel 5.5.2.** Sei $Z$ exponentialverteilt mit Tailfunktion $\bar{F}(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$, $x > 0$, und Dichte $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$, $x > 0$. Die Asufallrate ist dann gegeben durch

$$h(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \lambda, \quad x > 0.$$

Die Exponentialverteilung hat also eine *konstante* Ausfallrate. Das hat mit der Vergessenseigenschaft der Exponentialverteilung in Zusammenhang gebracht werden: Ein Gerät, dass zum Zeitpunkt $x$ noch funktioniert, "erinnert" sich an sein Alter nicht und fällt mit der gleichen Rate aus, wie ein neues Gerät gleich nach Inbetriebnahme.

Im Folgenden werden wir eine Formel benutzen, die die Tailfunktion durch die Ausfallrate darstellt:

**Lemma 5.5.3.** Für beliebiges $a \in (x_0, x^*)$ gilt

$$\bar{F}(x) = \bar{F}(a) \exp\left\{ -\int_a^x h(u) \mathrm{d}u \right\}, \quad x \in [a, x^*).$$

Beweis. Mit der Newton–Leibniz–Formel ergibt sich

$$\bar{F}(x) = \mathrm{e}^{\log \bar{F}(x)} = \exp\left\{ \int_a^x (\log \bar{F})'(u) \mathrm{d}u + \log \bar{F}(a) \right\} = \bar{F}(a) \exp\left\{ -\int_a^x h(u) \mathrm{d}u \right\},$$

wobei wir im letzten Schritt die Definition der Ausfallrate benutzt haben. □

### Von Mises–Bedingung für den Fréchet–Max–Anziehungsbereich

Bevor wir die von Mises–Bedingung für den Max–Anziehungsbereich der Fréchet–Verteilung formulieren, betrachten wir ein Beispiel.

**Beispiel 5.5.4.** Sei $X$ Pareto–verteilt mit Tailfunktion $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}$, $x > 1$. Dabei sei $\alpha > 0$ ein Parameter. Die Dichte ist $f(x) = \alpha x^{-\alpha-1}$. Die Ausfallrate ist somit

$$h(x) = \frac{\alpha}{x}, \quad x > 1.$$

Bekanntlich gilt $X \in \mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$.

Wir werden nun zeigen, dass alle Verteilungen mit unendlichem rechten Endpunkt und einer zu $\frac{\alpha}{x}$ asymptotisch äquivalenten Ausfallrate in $\mathrm{MDA}(\Phi_\alpha)$ liegen.

**Satz 5.5.5** (von Mises, 1936)**.** Sei $X$ eine Zufallsvariable mit rechtem Endpunkt $x^* = +\infty$ und Ausfallrate $h(x)$, $x > x_0$. Es gelte

$$h(x) \sim \frac{\alpha}{x}, \quad x \to +\infty, \tag{5.5.1}$$

mit einem Parameter $\alpha > 0$. Dann liegt $X$ im Max–Anziehungsbereich der Fréchet–Verteilung $\Phi_\alpha$.

Beweis. Wähle ein $a > x_0$. Es gilt nach Lemma 1.5.3

$$\bar{F}(x) = \bar{F}(a) \exp\left\{-\int_a^x h(u)\mathrm{d}u\right\} = \bar{F}(a) \exp\left\{\int_a^x \frac{\varepsilon(u)}{u}\mathrm{d}u\right\},$$

wobei die Funktion $\varepsilon(u) := -h(u)u$ wegen (1.5.1) die Bedingung $\lim_{u\to\infty} \varepsilon(u) = -\alpha$ erfüllt. Es folgt aus dem Darstellungssatz von Karamata, dass $\bar{F}$ regulär variierend mit Index $-\alpha$ ist. Somit liegt $F$ im Max–Anziehungsbereich der Fréchet–Verteilung $\Phi_\alpha$. □

### Von Mises–Bedingung für den Weibull–Max–Anziehungsbereich

Der Weibull–Fall ist dem Fréchet–Fall sehr ähnlich, ein wesentlicher Unterschied ist allerdings, dass im Weibull–Fall der rechte Endpunkt endlich ist.

**Beispiel 5.5.6.** Sei $X$ eine Zufallsvariable mit rechtem Endpunkt $x^* < +\infty$ und Tailfunktion $\bar{F}(x) = (x^* - x)^\alpha$, $x \in [x^* - 1, x^*]$. Dabei sei $\alpha > 0$ ein Parameter. Die Dichte ist $f(x) = \alpha(x^* - x)^{\alpha-1}$, $x \in [x^* - 1, x^*]$. Die Ausfallrate ist somit

$$h(x) = \frac{\alpha}{x^* - x}, \quad x \in (x^* - 1, x^*).$$

Bekanntlich liegt $X$ im Max–Anziehungsbereich der Weibull-Verteilung $\Psi_\alpha$.

**Satz 5.5.7** (von Mises, 1936)**.** Sei $X$ eine absolut stetige Zufallsvariable mit endlichem rechtem Endpunkt $x^* < +\infty$ und Ausfallrate $h(x)$, $x \in (x_0, x^*)$. Es gelte

$$h(x) \sim \frac{\alpha}{x^* - x}, \quad x \uparrow x^*, \tag{5.5.2}$$

wobei $\alpha > 0$. Dann liegt $X$ im Max–Anziehungsbereich der Weibull–Verteilung $\Psi_\alpha$.

Beweis. Ähnlich wie im Fréchet–Fall. □

### Von Mises–Bedingung für den Gumbel–Max–Anziehungsbereich

Um die von Mises–Bedingung im Gumbel–Fall zu formulieren, erinnern wir uns zuerst daran, dass wir den Gumbel–Fall als eine Art “Grenzwert” des Fréchet– und des Weibull–Falls für $\alpha \to +\infty$ betrachten können. Der rechte Endpunkt kann im Gumbel–Fall sowohl endlich als auch unendlich sein. Betrachten wir den Fall eines endlichen rechten Endpunktes. Aus der von Mises–Bedingung für den Fréchet–Fall $h(x) \sim \frac{\alpha}{x}$ bzw. $\frac{1}{h(x)} \sim \frac{x}{\alpha}$ für $x \to +\infty$ wird bei einem informellen Übergang zum Grenzwert $\alpha \to +\infty$ die Bedingung

$$\frac{1}{h(x)} = o(x), \quad x \to +\infty.$$

Leider braucht man im Gumbel–Fall eine etwas stärkere Bedingung, die man durch formales Ableiten der obigen Bedingung erhält:

**Satz 5.5.8** (von Mises, 1936)**.** Sei $X$ eine Zufallsvariable mit rechtem Endpunkt $x^*$ der endlich oder unendlich sein darf. Die Ausfallrate $h(x)$ existiere und sei differenzierbar und strikt positiv auf einem Intervall $(x_0, x^*)$, und es gelte

$$\lim_{x \uparrow x^*} \left(\frac{1}{h}\right)'(x) = 0. \tag{5.5.3}$$

Dann liegt $X$ im Max–Anziehungsbereich der Gumbel–Verteilung $\Lambda$.

Beweis. Wir überprüfen die Bedingungung von Satz 1.3.1 mit

$$g(x) := \frac{1}{h(x)}.$$

Wir zeigen, dass für jedes $u \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \uparrow x^*} \frac{\bar{F}(x + ug(x))}{\bar{F}(x)} = \mathrm{e}^{-u}. \tag{5.5.4}$$

Sei $u > 0$, denn für negatives $u$ ist der Beweis analog. Mit Lemma 1.5.3 gilt

$$\frac{\bar{F}(x + ug(x))}{\bar{F}(x)} = \exp\left\{-\int_x^{x+ug(x)} h(y)\mathrm{d}y\right\} = \exp\left\{-\int_0^u \frac{g(x)}{g(x + zg(x))}\mathrm{d}z\right\},$$

wobei wir in der zweiten Gleichung den Ansatz $z := \frac{y-x}{g(x)} \in [0, u]$ gemacht haben. Für den Beweis von (1.5.4) reicht es zu zeigen, dass gleichmäßig in $z \in [0, u]$ gilt

$$\lim_{x \uparrow x^*} \frac{g(x)}{g(x + zg(x))} = 1. \tag{5.5.5}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der von Mises–Bedingung $\lim_{x \uparrow x^*} g'(x) = 0$ gibt es ein $s_0 = s_0(\varepsilon) \in (x_0, x^*)$, so dass $|g'(s)| < \frac{\varepsilon}{u}$ für alle $s \in (s_0, x^*)$. Es folgt, dass für alle $z \in [0, u]$

$$|g(x + zg(x)) - g(x)| = \left|\int_x^{x+zg(x)} g'(s)\mathrm{d}s\right| \le \frac{\varepsilon}{u} zg(x) \le \varepsilon g(x).$$

Somit gilt für alle $x \in (s_0, x^*)$

$$\left|\frac{g(x + zg(x)) - g(x)}{g(x)}\right| \le \varepsilon.$$

Das beweist die Behauptung (1.5.5). □

**Beispiel 5.5.9.** Für die Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda$ gilt $h(x) = \lambda$ und somit

$$g(x) = \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Die von-Mises Bedingung ist erfüllt, denn $(1/h)'(x) = 0$ für alle $x > 0$.

**Beispiel 5.5.10.** Die Dichte $f$ der Standardnormalverteilung erfüllt die Differenzialgleichung $f'(x) = -xf(x)$. Somit ergibt sich

$$\left(\frac{1}{h}\right)'(x) = \left(\frac{\bar{F}}{f}\right)'(x) = \frac{-f^2(x) + \bar{F}(x)f'(x)}{f^2(x)} = -1 + \frac{\bar{F}(x)x}{f(x)} \to 0, \quad x \to +\infty,$$

denn wir haben in Lemma 1.4.1 gezeigt, dass $\bar{F}(x) \sim \frac{1}{x}f(x)$.

A. A. Balkema und L. de Haan (1972) haben bewiesen, dass eine Verteilungsfunktion $F$ genau dann im Max–Anziehungsbereich der Gumbel–Verteilung liegt, wenn es eine Verteilungsfunktion $G$ mit demselben rechten Endpunkt $x^*$ wie $F$ gibt, die die von Mises–Bedingung erfüllt und für die $\bar{F}(t) \sim \bar{G}(t)$ für $t \uparrow x^*$ gilt. In diesem Sinne ist die von Mises–Bedingung nicht nur hinreichend, sondern auch "bis auf asymptotische Äquivalenz" sogar notwendig.