KAPITEL 4

Regulär variierende Funktionen

Unser nächstes Ziel ist es, die Max-Anziehungsbereiche der Extremwertverteilungen zu beschreiben. Dies wird im nächsten Kapitel geschehen. Wir haben bereits gesehen, dass die Verteilung mit der Tailfunktion $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}$, $x \geq 1$, im Max-Anziehungsbereich der Fréchet–Verteilung Φ_α liegt. Wir werden später sehen, dass der Max-Anziehungsbereich von Φ_α aus allen Verteilungen besteht, deren Tailfunktionen sich im gewissen Sinne "wie $x^{-\alpha}$" verhalten. Um die exakte Bedingung zu formulieren, brauchen wir den Begriff der regulären Variation, den wir in diesem Kapitel einführen. Wir werden hier nur auf einige Aspekte der regulären Variation eingehen, für eine umfassende Darstellung dieses Gebiets verweisen wir auf das Buch von N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels. *Regular Variation.*

4.1. Definition der regulär variierenden Funktionen

Definition 4.1.1 (Karamata, 1930)**.** Eine Funktion $L : (A, \infty) \to (0, \infty)$ ist **langsam variierend** in $+\infty$, wenn

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1 \text{ für jedes } \lambda > 0.$$

Bemerkung 4.1.2. Der genaue Wert von A spielt keine Rolle, denn in der obigen Definition geht es nur um das Verhalten der Funktion L für $x \to +\infty$. Es hat keinen Einfluss auf die Eigenschaft der langsamen Variation, wenn man die Funktion L auf einem endlichen Intervall beliebig verändert.

Beispiel 4.1.3. Eine Funktion L, für die der Grenzwert $c := \lim_{x \to +\infty} L(x)$ in $(0, \infty)$ existiert, ist langsam variierend, denn

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = \frac{c}{c} = 1.$$

Ist aber der Grenzwert c gleich $+\infty$ oder 0, so muss die Funktion nicht langsam variierend sein. Zum Beispiel sind die Funktionen $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = 1/x$ nicht langsam variierend.

Beispiel 4.1.4. Die Funktion $L(x) = c(\log x)^\beta$, mit $c > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ ist langsam variierend, denn für jedes $\lambda > 0$ gilt

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} = \frac{c(\log(\lambda x))^\beta}{c(\log x)^\beta} = \left(\frac{\log x + \log \lambda}{\log x}\right)^\beta \to 1$$

für $x \to +\infty$.

Beispiel 4.1.5. Die Funktionen
$$\log x, \quad \log\log x, \quad \log\log\log x, \dots$$
sind langsam variierend. Funktionen der Form
$$c(\log x)^{\beta_1}(\log\log x)^{\beta_2}\dots(\log\dots\log x)^{\beta_k}$$
mit $c > 0$, $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$ sind ebenfalls langsam variierend.

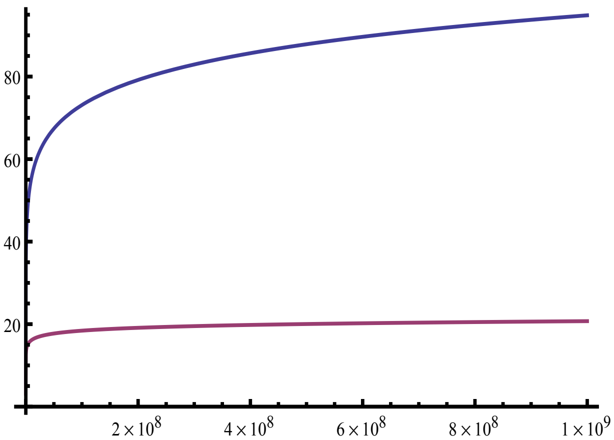

Abbildung 1. Zwei langsam variierende Funktionen: $\exp\{\sqrt[3]{\log x}\}$ (blau) und $\log x$ (rot).

Beispiel 4.1.6. Für $\alpha \neq 0$ ist die Funktion $f(x) = x^\alpha$ nicht langsam variierend. Wir werden später sehen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine langsam variierende Funktion nicht schneller als x^ε steigen darf und nicht schneller als $x^{-\varepsilon}$ gegen 0 gehen darf.

Beispiel 4.1.7. Die Funktionen $L(x) = \mathrm{e}^{(\log x)^\beta}$ sind für alle $|\beta| < 1$ langsam variierend (Übungsaufgabe). Für $\beta = \pm 1$ ergeben sich die Funktionen $L(x) = x$ bzw. $L(x) = 1/x$, die nicht langsam variierend sind. Allerdings ist die Funktion
$$L_1(x) = \mathrm{e}^{\log x / \log\log x}$$
langsam variierend (Übungsaufgabe).

Beispiel 4.1.8. Nicht jede beschränkte Funktion $L : (0, \infty) \to (0, \infty)$ ist langsam variierend. Beispiel: $L(x) = 2 + \sin x$ ist nicht langsam variierend (Übung).

Beispiel 4.1.9. Es gibt eine langsam variierende Funktion L, die zwischen 0 und $+\infty$ oszilliert in dem Sinne, dass $\limsup_{x\to\infty} L(x) = +\infty$ und gleichzeitig $\liminf_{x\to\infty} L(x) = 0$. Ein Beispiel ist gegeben durch (Übungsaufgabe)
$$L(x) = \exp\left\{\sqrt{\log x} \cdot \cos\left(\sqrt[3]{\log x}\right)\right\}, \quad x \geq 1. \tag{4.1.1}$$
Diese Funktion oszilliert unendlich oft zwischen der "unteren Grenze" $\mathrm{e}^{-\sqrt{\log x}}$ (die im Fall $\cos(\sqrt[3]{\log x}) = -1$ erreicht wird) und der "oberen Grenze" $\mathrm{e}^{\sqrt{\log x}}$ (die im Fall $\cos(\sqrt[3]{\log x}) = 1$ erreicht wird). Allerdings sind die Oszillationen sehr langsam: Zum Beispiel erreicht L die obere Grenze $\mathrm{e}^{\sqrt{\log x}}$ an den Stellen $\mathrm{e}^{8\pi^3 k^3}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Aufgabe 4.1.10. Seien L_1 und L_2 langsam variierende Funktionen. Zeigen Sie, dass $L_1 L_2$ und $L_1 + L_2$ ebenfalls langsam variierend sind.

Definition 4.1.11 (Karamata, 1930)**.** Eine messbare Funktion $R : (A, \infty) \to (0, \infty)$ heißt **regulär variierend** in $+\infty$ mit Index $\alpha \in \mathbb{R}$, falls

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{R(\lambda x)}{R(x)} = \lambda^{\alpha} \text{ für jedes } \lambda > 0.$$

Bezeichnung: $f \in \mathrm{RV}_{\alpha}$.

Bemerkung 4.1.12. Eine Funktion ist langsam variierend genau dann, wenn sie regulär variierend mit Index $\alpha = 0$ ist.

Beispiel 4.1.13. Die Funktion $R(x) = cx^{\alpha}$, wobei $c > 0$, ist regulär variierend mit Index α, denn

$$\frac{R(\lambda x)}{R(x)} = \frac{c(\lambda x)^{\alpha}}{cx^{\alpha}} = \lambda^{\alpha} \text{ für alle } \lambda > 0.$$

Beispiel 4.1.14. Die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{[\log x]}$ (wobei $[\cdot]$ die Gauß–Klammer ist) ist nicht regulär variierend obwohl die sehr ähnliche Funktion $R(x) = \mathrm{e}^{\log x} = x$ regulär variierend mit Index $\alpha = 1$ ist.

Aufgabe 4.1.15. Seien $f \in \mathrm{RV}_{\alpha}$ und $g \in \mathrm{RV}_{\beta}$. Zeigen Sie, dass $fg \in \mathrm{RV}_{\alpha+\beta}$.

Viele Beispiele von regulär variierenden Funktionen können konstruiert werden, indem man eine langsam variierende Funktion $L(x)$ mit x^{α} multipliziert. Dadurch wird die Klasse der regulär variierenden Funktionen ausgeschöpft.

Satz 4.1.16. Sei R eine regulär variierende Funktion mit Index α. Dann gibt es eine langsam variierende Funktion L, sodass

$$R(x) = x^{\alpha} L(x).$$

Beweis. Setze $L(x) = \frac{R(x)}{x^{\alpha}}$. Dann muss man nur noch zeigen, dass $L(x)$ langsam variierend ist:

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} = \frac{R(\lambda x)/(\lambda x)^{\alpha}}{R(x)/x^{\alpha}} = \lambda^{-\alpha} \frac{R(\lambda x)}{R(x)} \to \lambda^{-\alpha} \cdot \lambda^{\alpha} = 1, \qquad x \to +\infty,$$

da R nach Voraussetzung regulär variierend ist. Deshalb ist L langsam variierend. □

Im Rest dieses Kapitels werden wir einige Eigenschaften der langsam und regulär variierenden Funktionen herleiten. Die wichtigste Anwendung dieser Eigenschaften in diesem Skript ist die Beschreibung der Max–Anziehungsbereiche.

4.2. Asymptotische Äquivalenz

Definition 4.2.1. Zwei Funktionen $f : (A, \infty) \to (0, \infty)$ und $g : (A, \infty) \to (0, \infty)$ heißen **asymptotisch äquivalent** (in $+\infty$), falls

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Bezeichnung: $f(x) \sim g(x)$ für $x \to +\infty$.

Beispiel 4.2.2. $x \sim x + 3$ und $x^2 + x \sim x^2 + 2x$ für $x \to +\infty$.

Aufgabe 4.2.3. Seien $f_1, f_2, g_1, g_2 : (A, \infty) \to (0, \infty)$ Funktionen mit $f_1 \sim f_2$ und $g_1 \sim g_2$. Zeigen Sie, dass

(1) $f_1 g_1 \sim f_2 g_2$.
(2) $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$.

Die Klasse der regulär variierenden Funktionen mit Index α ist abgeschlossen bezüglich der asymptotischen Äquivalenz:

Aufgabe 4.2.4. Es gelte $f \sim g$ und $f \in \mathrm{RV}_\alpha$. Zeigen Sie, dass dann auch $g \in \mathrm{RV}_\alpha$ ist.

4.3. Satz über die gleichmäßige Konvergenz

Satz 4.3.1 (Über die gleichmäßige Konvergenz, Karamata, 1930)**.** Sei L eine langsam variierende Funktion. Dann gilt für alle $0 < a < b < \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \sup_{\lambda \in [a,b]} \left| \frac{L(\lambda x)}{L(x)} - 1 \right| = 0.$$

Beweis. Schritt 1. Zunächst einmal werden wir aus der "multiplikativen" Notation in die "additive" Notation wechseln. Betrachte die messbare Funktion

$$h(x) = \log L(\mathrm{e}^x), \quad x > \log A.$$

Die Definition der langsamen Variation für L übersetzt sich wie folgt: Für jedes $u \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x \to \infty} (h(x + u) - h(x)) = 0. \tag{4.3.1}$$

Wir werden zeigen, dass die Konvergenz in (4.3.1) gleichmäßig in $u \in I := [\log a, \log b]$ ist.

Schritt 2. Angenommen, die Konvergenz ist nicht gleichmäßig in $u \in I$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $x_1, x_2, \ldots \to \infty$ mit

$$\sup_{u \in I} |h(x_n + u) - h(x_n)| > 2\varepsilon \text{ für } n = 1, 2, \ldots.$$

Es gibt also eine Folge $u_1, u_2, \ldots \in I$ mit

$$|h(x_n + u_n) - h(x_n)| > 2\varepsilon \text{ für } n = 1, 2, \ldots. \tag{4.3.2}$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass u_n gegen einen Grenzwert u konvergiert (andernfalls betrachte eine konvergente Teilfolge) und dass $|u_n - u| \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (andernfalls entferne endlich viele Terme in den Folgen).

Schritt 3. Laut (4.3.1) gilt für jedes $y \in \mathbb{R}$, dass

$$|h(x_n + y) - h(x_n)| < \varepsilon \text{ für } n \text{ hinreichend groß.} \tag{4.3.3}$$

Aus (4.3.2) und (4.3.3) ergibt sich, dass

$$|h(x_n + u_n) - h(x_n + y)| > \varepsilon \text{ für } n \text{ hinreichend groß.}$$

Definiere messbare Mengen $I_1, I_2, \ldots$ durch

$$I_k = \{y \in [-1, 1] \colon |h(x_n + u_n) - h(x_n + y)| > \varepsilon \text{ für alle } n \ge k\}.$$

Es gilt dann $\cup_{k=1}^{\infty} I_k = [-1, 1]$, somit existiert ein k so dass I_k ein strikt positives Lebesgue–Maß hat.

Schritt 4. Betrachte die Mengen $Z_n = u_n - I_k = \{u_n - y \colon y \in I_k\}$ und

$$Z = \{\omega \in [-1, 1] \colon \omega \in Z_n \text{ für unendlich viele } n\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} Z_n.$$

Es gilt $|Z_n| = |I_k| > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Mengen Z_n im Intervall $[u-2, u+2]$ enthalten sind, dürfen wir die Stetigkeit des Lebesgue–Maßes verwenden:

$$|Z| = \lim_{j \to \infty} \left| \bigcup_{n=j}^{\infty} Z_n \right| \ge \lim_{j \to \infty} |Z_j| = |I_k| > 0.$$

Schritt 5. Somit ist Z nicht leer. Sei $\omega \in Z$, dann gilt für unendlich viele n, dass $\omega \in u_n - I_k$ und somit

$$|h(x_n + u_n) - h(x_n + u_n - \omega)| > \varepsilon.$$

Das ist aber ein Widerspruch zu (4.3.1), denn $x_n + u_n \to \infty$. □

Für regulär variierende Funktionen nimmt der Satz über die gleichmäßige Konvergenz die folgende Form an:

Aufgabe 4.3.2. Zeigen Sie: Ist R eine mit Index α regulär variierende Funktion, so gilt für alle $0 < a < b < \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \sup_{\lambda \in [a,b]} \left| \frac{R(\lambda x)}{R(x)} - \lambda^{\alpha} \right| = 0.$$

Hinweis: $R(x) = L(x) x^{\alpha}$, wobei L langsam variierend ist.

Aufgabe 4.3.3. Seien $f \in \mathrm{RV}_{\alpha}$ und $g \in \mathrm{RV}_{\beta}$, und es gelte außerdem $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. Zeigen Sie, dass die Komposition $f(g(x))$ ebenfalls regulär variierend mit Index $\alpha\beta$ ist.

Satz 4.3.4 (Über die lokale Beschränktheit)**.** Sei L eine langsam variierende Funktion. Dann gibt es ein B, so dass L auf jedem Intervall der Form $[B, B + c]$ beschränkt ist.

BEWEIS. Nach dem Satz über die gleichmäßige Konvergenz gibt es ein $B > 0$, so dass für alle $x \geq B$

$$\sup_{\lambda \in [1,2]} \left| \frac{L(\lambda x)}{L(x)} - 1 \right| < 1.$$

Somit gilt für alle $x \geq B$

$$\sup_{\lambda \in [1,2]} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} < 2.$$

Mit $x = 2^k B$, $k = 0, 1, \ldots$, folgt, dass

$$\sup_{z \in [2^k B, 2^{k+1} B]} L(z) \leq 2L(2^k B).$$

Per Induktion erhält man, dass die Funktion L auf dem Intervall $[B, 2^k B]$ durch $2^k L(B)$ beschränkt ist. □

Aufgabe 4.3.5. Zeigen Sie: Ist R eine regulär variierende Funktion, so gibt es ein B, so dass R auf jedem Intervall der Form $[B, B + c]$ beschränkt ist.

4.4. Darstellungssatz von Karamata

Satz 4.4.1 (Darstellungssatz für langsam variierende Funktionen, Karamata, 1930)**.** Eine Funktion $L : (A, \infty) \to (0, \infty)$ ist genau dann langsam variierend, wenn es eine Darstellung der Form

$$L(x) = c(x) \exp \left\{ \int_a^x \frac{\varepsilon(u)}{u} \mathrm{d}u \right\}, \quad x \geq a, \tag{4.4.1}$$

gibt, wobei $a > A$ und $c(x) > 0$, $\varepsilon(x)$ messbare Funktionen sind mit

$$c := \lim_{x \to \infty} c(x) \in (0, \infty), \quad \lim_{x \to \infty} \varepsilon(x) = 0. \tag{4.4.2}$$

Aufgabe 4.4.2. Finden Sie eine solche Darstellung explizit für die Funktionen $L_1(x) = \log x$, $L_2(x) = \log \log x$, $L_3(x) = \mathrm{e}^{(\log x)^\beta}$, $|\beta| < 1$.

BEWEIS. SCHRITT 1. Es ist eine Übungsaufgabe, zu zeigen, dass jede in der Form (4.4.1), (4.4.2) dargestellte Funktion L langsam variierend ist.

SCHRITT 2. Es sei L eine langsam variierende Funktion. Wir zeigen, dass es eine Darstellung der Form (4.4.1) gibt. Zunächst einmal werden wir aus der "multiplikativen" in die "additive" Notation wechseln. Betrachte dazu die Funktion

$$h(x) := \log L(\mathrm{e}^x), \quad x > \log A.$$

Die Bedingung der langsamen Variation von L nimmt die folgende Gestalt an: Für alle $u \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x \to +\infty} (h(x+u) - h(x)) = 0. \tag{4.4.3}$$

Wir werden zeigen, dass es für h folgende Darstellung gibt:

$$h(x) = d(x) + \int_B^x e(t)\mathrm{d}t, \tag{4.4.4}$$

wobei $B \in \mathbb{R}$ und $d(x), e(x)$ messbare Funktionen sind mit

$$d := \lim_{x\to\infty} d(x) \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to\infty} e(x) = 0. \tag{4.4.5}$$

Daraus ergibt sich für L die Darstellung

$$L(x) = \mathrm{e}^{h(\log x)} = \mathrm{e}^{d(x)} \exp\left\{\int_B^{\log x} e(t)\mathrm{d}t\right\} = \mathrm{e}^{d(x)} \exp\left\{\int_B^x \frac{e(\log u)}{u}\mathrm{d}u\right\}$$

wobei wir den Ansatz $t = \log u$ gemacht haben. Das würde die Behauptung beweisen, denn

$$c(x) := \mathrm{e}^{d(x)} \to \mathrm{e}^d \in (0,\infty), \quad \varepsilon(x) := e(\log x) \to 0$$

für $x \to \infty$, was die Gültigkeit von (4.4.2) zeigt.

Schritt 3. Wir beweisen die Existenz der Darstellung (4.4.4). Wir würden sehr gerne $e(t) = h'(t)$ setzen, das geht allerdings nicht, denn h muss nicht differenzierbar sein. Wir setzen deshalb $e(t) = h(t+1) - h(t)$. Es sei bemerkt, dass $\lim_{x\to\infty} e(x) = 0$ nach (4.4.3). Für $x > B$ gilt

$$\int_B^x e(t)\mathrm{d}t = \int_B^x (h(t+1) - h(t))\mathrm{d}t = \int_x^{x+1} h(t)\mathrm{d}t - \int_B^{B+1} h(t)\mathrm{d}t,$$

wobei B so groß sei, dass alle beteiligten Funktionen auf $[B,x]$ beschränkt (und somit integrierbar) seien. Somit

$$h(x) = \int_B^x e(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 (h(x) - h(x+u))\mathrm{d}u + \int_B^{B+1} h(t)\mathrm{d}t.$$

Der dritte Term hängt nicht von x ab. Der zweite Term konvergiert für $x \to \infty$ gegen 0, denn $h(x+u) - h(x) \to 0$ gleichmäßig in $u \in [0,1]$ nach dem Satz über die gleichmäßige Konvergenz. Wir können also die Summe der beiden Terme mit $d(x)$ bezeichnen, dann ist (4.4.5) erfüllt. □

Für regulär variierende Funktionen nimmt die Karamata–Darstellung die folgende Form an:

Aufgabe 4.4.3. Zeigen Sie: Eine Funktion $R : (A,\infty) \to (0,\infty)$ ist genau dann regulär variierend mit Index $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn es eine Darstellung der Form

$$R(x) = \tilde{c}(x) \exp\left\{\int_a^x \frac{\tilde{\varepsilon}(u)}{u}\mathrm{d}u\right\}, \quad x \geq a, \tag{4.4.6}$$

gibt, wobei $a > A$ und $\tilde{c}(x) > 0$, $\tilde{\varepsilon}(x)$ messbare Funktionen sind mit

$$\tilde{c} := \lim_{x\to\infty} \tilde{c}(x) \in (0,\infty), \quad \lim_{x\to\infty} \tilde{\varepsilon}(x) = \alpha. \tag{4.4.7}$$

4.5. Abschätzungen für regulär variierende Funktionen

Satz 4.5.1. Sei L langsam variierend, dann gilt für jedes $\delta > 0$

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\delta}L(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} x^{\delta}L(x) = +\infty.$$

Beweis. Das folgt aus dem Darstellungssatz (Übung). □

Korollar 4.5.2. Sei R regulär variierend mit Index α, dann gilt für jedes $\delta > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R(x)}{x^{\alpha+\delta}} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{R(x)}{x^{\alpha-\delta}} = 0.$$

Beweis. Betrachte die langsam variierende Funktion $L(x) := R(x)/x^\alpha$ und wende Satz 4.5.1 an. □

Aufgabe 4.5.3. Sei R regulär variierend mit Index α. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to+\infty} R(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } \alpha > 0, \\ 0, & \text{falls } \alpha < 0. \end{cases}$$

Aufgabe 4.5.4. Sei R_1 regulär variierend mit Index α_1 und R_2 regulär variierend mit Index α_2. Zeigen Sie, dass die Funktion $R_1 + R_2$ regulär variierend mit Index $\max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ ist.

Aufgabe 4.5.5. Sei L langsam variierend. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log L(x)}{\log x} = 0.$$

Satz 4.5.6 (Potter, 1942)**.** Sei L langsam variierend. Für alle $A > 1$, $\delta > 0$ gibt es ein $K = K(A, \delta)$ mit

$$\frac{L(y)}{L(x)} \le A \max\left\{ \left(\frac{x}{y}\right)^\delta, \left(\frac{y}{x}\right)^\delta \right\}, \text{ für alle } x, y > K.$$

Beweis. Mit dem Darstellungssatz erhalten wir

$$\frac{L(y)}{L(x)} = \frac{c(y)}{c(x)} \exp\left\{ \int_x^y \frac{\varepsilon(u)}{u} \mathrm{d}u \right\}.$$

Da $c(x) \to c$, $c(y) \to c$, $\varepsilon(u) \to 0$ für $x, y, u \to +\infty$, können wir ein K finden, so dass $c(x) > c/\sqrt{A}, c(y) < c\sqrt{A}$ und $\varepsilon(u) < \delta$ für $x, y, u > K$. Somit ist

$$\frac{c(y)}{c(x)} < A, \quad \left| \int_x^y \frac{\varepsilon(u)}{u} \mathrm{d}u \right| \le \delta \left| \log \frac{y}{x} \right|.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

4.6. Charakterisierung der Grenzwertfunktionen

In der Definition einer regulär variierenden Funktion f wird verlangt, dass der Grenzwert

$$g(\lambda) := \lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)}$$

für jedes $\lambda > 0$ existiert und eine bestimmte Form, nämlich λ^α, hat. Erstaunlicherweise reicht es viel weniger zu verlangen: Wenn der Grenzwert $g(\lambda)$ für alle λ aus einer Menge mit positivem Lebesgue–Maß existiert, dann existert er für alle $\lambda > 0$ und hat automatisch die Form λ^α.

Satz 4.6.1. Sei $f : (A, \infty) \to (0, \infty)$ eine messbare Funktion, für die der Grenzwert

$$g(\lambda) := \lim_{x\to+\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} \in (0, \infty) \tag{4.6.1}$$

für alle λ aus einer messbaren Menge $K \subset (0, \infty)$ mit strikt positivem Lebesgue–Maß existiert. Dann existiert der Grenzwert $g(\lambda)$ sogar für alle $\lambda > 0$. Weiterhin hat die Funktion g die Form $g(\lambda) = \lambda^\alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Funktion f ist somit regulär variierend.

Beweis. Schritt 1. Es sei Λ die Menge aller $\lambda > 0$, für die der Grenzwert (4.6.1) in $(0, \infty)$ existiert. Die Menge Λ ist eine multiplikative Untergruppe von $(0, \infty)$, nämlich

(1) für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ ist auch $\lambda_1\lambda_2 \in \Lambda$;
(2) für alle $\lambda \in \Lambda$ ist auch $1/\lambda \in \Lambda$.

Wir zeigen die erste Eigenschaft: Für $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ gilt

$$\frac{f(\lambda_1\lambda_2 x)}{f(x)} = \frac{f(\lambda_1\lambda_2 x)}{f(\lambda_2 x)} \cdot \frac{f(\lambda_2 x)}{f(x)} \to g(\lambda_1)g(\lambda_2) \quad \text{für } x \to +\infty. \tag{4.6.2}$$

Der Beweis der zweiten Eigenschaft ist eine Übungsaufgabe.

Schritt 2. Somit ist die Menge $S := \log\Lambda = \{\log\lambda\colon \lambda \in \Lambda\}$ eine additive Untergruppe von $\mathbb{R}$. Diese Untergruppe enthält die Menge $\log K$, die (genauso wie K) messbar ist und ein strikt positives Lebesgue–Maß hat. Nach Satz **??** gilt also $S = \mathbb{R}$ und somit $\Lambda = (0, \infty)$. Die Existenz des Grenzwerts $g(\lambda)$ in (4.6.1) ist somit für alle $\lambda > 0$ bewiesen.

Schritt 3. Aus (4.6.2) folgt, dass g eine multiplikative Funktion ist. Außerdem ist g als Grenzwert von messbaren Funktionen, siehe (4.6.1), messbar. Nach dem Satz von Ostrowski hat g die Form $g(\lambda) = \lambda^\alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. □

Aufgabe 4.6.2 (Satz von Landau, 1911)**.** Eine Funktion $L : (A, \infty) \to (0, \infty)$ sei *monoton* (steigend oder fallend) mit der Eigenschaft, dass

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{L(2x)}{L(x)} = 1.$$

Zeigen Sie, dass L langsam variierend ist.

Aufgabe 4.6.3. Konstruieren Sie eine nicht langsam variierende Funktion $L : (0, \infty) \to (0, \infty)$ mit der Eigenschaft, dass
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{L(2x)}{L(x)} = 1.$$

4.7. Integrale von regulär variierenden Funktionen

Definition 4.7.1. Seien $f, g : (A, \infty) \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $g(x) \neq 0$. Wir sagen, dass f und g für $x \to +\infty$ **asymptotisch äquivalent** sind, wenn
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$
Notation: $f \sim g$ für $x \to \infty$.

Beispiel 4.7.2. Für $x \to \infty$ gilt $x \sim x + 2$.

Beispiel 4.7.3. Für jedes $\alpha > -1$ gilt
$$\int_1^x t^\alpha \mathrm{d}t = \frac{x^{\alpha+1} - 1}{\alpha + 1} \sim \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1}, \quad x \to +\infty.$$

Wie kann man aber zum Beispiel die Asymptotik des Integrals $\int_1^x t^\alpha (\log t)^3 \mathrm{d}t$ für $x \to +\infty$ berechnen? Man kann wie folgt argumentieren. Die Funktion $(\log t)^3$ ist langsam variierend, also unterscheidet sich ihr Wert auf dem ganzen Intervall $[x/100, x]$ nur unwesentlich von $(\log x)^3$ (Satz über die gleichmäßige Konvergenz). Auf dem Intervall $[0, x/100]$ kann der Unterschied wesentlich sein, allerdings ist dieses Intervall klein und sein Beitrag zum Integral sollte auch klein sein. Somit kann man vermuten, dass man $(\log t)^3$ durch $(\log x)^3$ ersetzen kann:
$$\int_1^x t^\alpha (\log t)^3 \mathrm{d}t \sim (\log x)^3 \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1}, \quad x \to +\infty.$$
Hier ist eine allgemeine Aussage darüber.

Satz 4.7.4 (Karamata, 1930)**.** Sei L eine langsam variierende Funktion und B so groß, dass L auf jedem Intervall der Form $[B, B+c]$ beschränkt ist. Dann gilt für jedes $\alpha > -1$
$$\int_B^x t^\alpha L(t) \mathrm{d}t \sim L(x) \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1}, \quad x \to +\infty. \tag{4.7.1}$$

Beweis. Sei $\delta \in (0, \alpha + 1)$. Nach dem Satz von Potter können wir $B' \geq B$ so groß wählen, dass
$$\frac{L(y)}{L(x)} \leq 2 \max\left\{ \left(\frac{x}{y}\right)^\delta, \left(\frac{y}{x}\right)^\delta \right\}, \quad x, y > B'.$$

Wir können die untere Grenze im Integral (4.7.1) auf B' verschieben, denn dadurch ändert sich das Integral nur um eine Konstante. Sei im Folgenden $x > B'$. Betrachte

$$\frac{\int_{B'}^{x} t^{\alpha} L(t)\mathrm{d}t}{x^{\alpha+1}L(x)/(\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha+1}\int_0^1 \frac{L(ux)}{L(x)} u^{\alpha} \mathbb{1}_{[B'/x,1]}(u)\mathrm{d}u,$$

wobei wir die Variable $u = t/x$ eingeführt haben. Nun gilt es für $u \in (0,1)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{L(ux)}{L(x)} u^{\alpha} \mathbb{1}_{[B'/x,1]}(u)\right) = u^{\alpha}, \quad 0 \le \frac{L(ux)}{L(x)} u^{\alpha} \mathbb{1}_{[B'/x,1]}(u) \le 2u^{\alpha-\delta}.$$

Es liegt also eine dominierte Konvergenz vor, denn $\int_0^1 u^{\alpha-\delta}\mathrm{d}u < \infty$ wegen $\delta < \alpha + 1$. Mit dem Satz über die domnierte Konvergenz erhalten wir, dass

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_{B'}^{x} t^{\alpha} L(t)\mathrm{d}t}{x^{\alpha+1}L(x)/(\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha+1}\int_0^1 u^{\alpha}\mathrm{d}u = 1,$$

was die Behauptung beweist.

Beispiel 4.7.5. Für $\alpha = 0$ erhalten wir, dass

$$\int_B^x L(t)\mathrm{d}t \sim xL(x), \quad x \to +\infty.$$