KAPITEL 2

Cauchy–Funktionalgleichung

Die Resultate dieses Kapitels haben zwar keinen direkten Bezug zur Extremwerttheorie, werden aber später benötigt, um den Satz von Fisher–Tippett zu beweisen. Außerdem werden diese Resultate benutzt, um einige Eigenschaften von regulär variierenden Funktionen herzuleiten.

2.1. Additive und multiplikative Funktionen

Definition 2.1.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **additiv**, wenn

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.1.1}$$

Die Gleichung (2.1.1) heißt **Cauchy–Funkionalgleichung**.

Es ist klar, dass eine Funktion der Form $f(x) = cx$ additiv ist. Gibt es weitere additive Funktionen? Wir werden sehen, dass die Antwort "nein" lautet, allerdings nur wenn man an die Funktion f zusätzliche Bedingungen wie Stetigkeit, Monotonie oder Messbarkeit stellt.

Man kann auch eine multiplikative Version der Cauchy–Funktionalgleichung formulieren.

Definition 2.1.2. Eine Funktion $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ heißt **multiplikativ**, wenn

$$g(xy) = g(x)g(y) \quad \text{für alle } x, y > 0. \tag{2.1.2}$$

Die Funktion $g(x) = x^c$ ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ multiplikativ. Aus jeder multiplikativen Funktion g lässt sich eine additive Funktion

$$f(x) = \log g(\mathrm{e}^x), \quad x \in \mathbb{R},$$

basteln. Somit können alle Fragen über multiplikative Funktionen auf entsprechende Fragen über additive Funktionen reduziert werden. In Zukunft werden wir deshalb nur additive Funktionen betrachten.

2.2. Stetige Lösungen

Satz 2.2.1 (Cauchy, 1821)**.** Eine Funktion f sei additiv und überall stetig. Dann hat f die Form $f(x) = cx$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Beweis. Schritt 1. Mit $x = y = 0$ ergibt sich $f(0) = f(0) + f(0)$, somit ist $f(0) = 0$. Mit $y = -x$ ergibt sich $f(0) = f(x) + f(-x)$, somit ist $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Schritt 2. Per Induktion zeigt man, dass die Additivität sogar für eine beliebige Anzahl von Summanden gilt:

$$f(x_1 + \ldots + x_n) = f(x_1) + \ldots + f(x_n), \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Schritt 3. Mit $x_1 = \ldots = x_n = 1/n$ erhält man $f(1) = nf(1/n)$, also

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{f(1)}{n} = \frac{c}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dabei haben wir $c := f(1)$ gesetzt.

Schritt 4. Indem wir die Additivität für m Summanden, die alle gleich $1/n$ sind, benutzen, erhalten wir, dass

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = c\frac{m}{n}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Somit gilt für alle rationalen Zahlen r, dass $f(r) = cr$, wobei das wegen Schritt 1 auch für negatives r richtig ist.

Schritt 5. Bislang haben wir nur die Additivität und keine Stetigkeit benutzt. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gibt eine Folge von rationalen Zahlen $r_1, r_2, \ldots$, die gegen x konvergiert. Für jedes n gilt $f(r_n) = cr_n$ wegen Schritt 4. Nun benutzen wir die Stetigkeit:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} cr_n = cx.$$

Somit ist die Behauptung bewiesen. □

Satz 2.2.2 (Darboux, 1875)**.** Eine Funktion f sei additiv und an mindestens einer Stelle z_0 stetig. Dann hat f die Form $f(x) = cx$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Beweis. Schritt 1. Wir zeigen, dass aus der Stetigkeit an der Stelle z_0 (für additive Funktion f) die Stetigkeit an der Stelle 0 folgt. Die Stetigkeit an der Stelle z_0 bedeutet, dass

$$\lim_{u\to 0} f(z_0 + u) = f(z_0).$$

Wegen der Additivität gilt aber $f(z_0 + u) = f(z_0) + f(u)$. Die obige Bedingung lässt sich also wie folgt darstellen:

$$\lim_{u\to 0} f(u) = 0,$$

Somit ist die Funktion f stetig an der Stelle 0.

Schritt 2. Wir zeigen, dass f überall stetig ist. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$\lim_{u\to 0} f(x + u) = \lim_{u\to 0}(f(x) + f(u)) = f(x) + \lim_{u\to 0} f(u) = f(x),$$

wobei wir Additivität und Stetigkeit an der Stelle 0 (Schritt 1) benutzt haben. Somit ist f überall stetig.

Schritt 3. Nun können wir den Satz von Cauchy anwenden. $\square$

Aufgabe 2.2.3. Eine Funktion f sei additiv und auf einem Intervall (a, b) monoton. Zeigen Sie, dass f die Form $f(x) = cx$ hat.

2.3. Satz von Steinhaus

Wir werden im Folgenden zeigen, dass sich die Eigenschaft der Stetigkeit im Satz von Cauchy durch die viel schwächere Eigenschaft der Messbarkeit ersetzen lässt. Dafür benötigen wir den Satz von Steinhaus, der in diesem Abschnitt bewiesen wird.

Definition 2.3.1. Für zwei Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ definieren wir die **Minkowski–Summe**

$$A + B = \{a + b \colon a \in A, b \in B\}$$

und die **Minkowski–Differenz**

$$A - B = \{a - b \colon a \in A, b \in B\}.$$

Insbesondere werden wir uns für die Selbstdifferenz $A - A$ einer Menge A interessieren. Es ist klar, dass $0 \in A - A$. Der nächste Satz besagt, dass $A - A$ erstaunlicherweise sogar ein Intervall um 0 enthält, wenn das Lebesgue–Maß von A positiv ist.

Wir bezeichnen das Lebesgue–Maß von A mit $|A|$.

Satz 2.3.2 (Steinhaus, 1920)**.** Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine messbare Menge mit $|A| > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $(-\delta, \delta) \subset A - A$.

Beweis. Schritt 1. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $|A| < \infty$. In der Tat, mindestens eine der Mengen $A_i := A \cap [i, i + 1)$ hat ein strikt positives Lebesgue–Maß. Es reicht, den Satz für eine solche Menge A_i zu beweisen, denn $A_i - A_i \subset A - A$.

Schritt 2. Sei also $|A| \neq 0, \infty$. Wir zeigen, dass es ein Intervall I mit $|A \cap I| > \frac{9}{10}|I|$ gibt. Somit wird fast das gesamte Intervall I von A überdeckt. Das Lebesgue–Maß von A wird wie folgt definiert:

$$|A| = \inf \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|,$$

wobei das Infimum über alle Überdeckungen von A durch abzählbar viele Intervalle $I_1, I_2, \dots$ genommen wird. Wegen $|A| \neq 0, \infty$ gibt es also eine Überdeckung mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \frac{10}{9}|A|. \tag{2.3.1}$$

Wäre nun $|A \cap I_k| \le \frac{9}{10}|I_k|$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, so hätten wir

$$|A| \le \sum_{k=1}^{\infty} |A \cap I_k| \le \frac{9}{10} \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|,$$

was wegen $|A| \ne 0, \infty$ im Widerspruch zu (2.3.1) steht. Somit ist $|A \cap I_k| > \frac{9}{10}|I_k|$ für mindestens ein k und wir können $I = I_k$ nehmen.

Schritt 3. Sei $\delta = \frac{1}{2}|I|$. Wir zeigen, dass $(-\delta, \delta) \subset A - A$. Sei also $|x| < \delta$. Es reicht zu zeigen, dass $A \cap (A + x) \ne \emptyset$. Hierzu reicht es zu zeigen, dass

$$(A \cap I) \cap ((A \cap I) + x) \ne \emptyset. \tag{2.3.2}$$

Nun haben die beiden Mengen $A \cap I$ und $(A \cap I) + x$ das gleiche Lebesgue–Maß $\ge \frac{9}{10}|I|$. Auf der anderen Seite sind beide Mengen im Intervall $I \cup (I + x)$ enthalten, dessen Länge wegen $|I| = 2\delta$ und $|x| < \delta$ höchstens $3\delta = \frac{3}{2}|I|$ ist. Da $2 \cdot \frac{9}{10} > \frac{3}{2}$ ist, müssen sich die Mengen $A \cap I$ und $(A \cap I) + x$ schneiden und die Behauptung (2.3.2) ist bewiesen. □

Aufgabe 2.3.3. Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine messbare Menge mit $|A| > 0$. Zeigen Sie ohne Verwendung des Satzes von Steinhaus, dass es in A zwei verschiedene Punkte x, y mit rationalem Abstand $|x - y| \in \mathbb{Q}$ gibt.

Aufgabe 2.3.4. Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ zwei messbare Mengen mit $|A| > 0$, $|B| > 0$. Zeigen Sie, dass die Minkowski–Summe $A + B$ Intervall enthält, d.h. es gibt $t \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ mit $(t - \delta, t + \delta) \subset A + B$.

Wir stellen nun einige Konsequenzen des Satzes von Steinhaus vor, die bei der Untersuchung von regulär variierenden Funktionen nützlich sein werden.

Definition 2.3.5. Eine **additive Untergruppe** von $\mathbb{R}$ ist eine Menge $S \subset \mathbb{R}$ mit den folgenden zwei Eigenschaften:

(1) aus $x, y \in S$ folgt, dass $x + y \in S$;
(2) aus $x \in S$ folgt, dass $-x \in S$.

Beispiel 2.3.6. Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, die Menge der algebraischen Zahlen sind additive Untergruppen von $\mathbb{R}$.

Der nächste Satz zeigt, dass es keine "massiven" additiven Untergruppen gibt mit Ausnahme von $\mathbb{R}$ selbst.

Satz 2.3.7. Sei S eine additive Untergruppe von $\mathbb{R}$, die eine messbare Menge mit positivem Maß enthält. Dann ist $S = \mathbb{R}$.

Beweis. Wegen der Untergruppeneigenschaft gilt $S - S \subset S$. Auf der anderen Seite gibt es nach dem Satz von Steinhaus ein $\delta > 0$ mit $(-\delta, \delta) \subset S - S$. Also ist $(-\delta, \delta) \subset S$. Wegen der Untergruppeneigenschaft gilt aber auch $(-n\delta, n\delta) \subset S$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $S = \mathbb{R}$. □

Für messbare additive Untergruppen gilt das folgende "Alles-oder-fast-nichts-Prinzip":

Korollar 2.3.8. Eine additive Untergruppe S von $\mathbb{R}$ sei messbar. Dann ist entweder $|S| = 0$ oder $S = \mathbb{R}$.

Beweis. Folgt aus Satz 2.3.7.

2.4. Messbare Lösungen

Der nächste Satz ist eine Verstärkung des Satzes von Cauchy.

Satz 2.4.1 (Ostrowski, 1929)**.** Sei f eine additive und messbare Funktion. Dann hat f die Form $f(x) = cx$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Beweis. Schritt 1. Wir zeigen, dass es eine Menge mit positivem Lebesgue–Maß gib, auf der die Funktion $|f|$ beschränkt ist. Betrachte hierzu die Mengen $A_n := \{x \in \mathbb{R} \colon |f(x)| \leq n\}$. Die Vereinigung dieser Mengen ist $\mathbb{R}$, also hat mindestens eine Menge A_n strikt positives Maß. Dabei ist $|f|$ auf der Menge A_n durch n beschränkt.

Schritt 2. Wir zeigen, dass $|f|$ auf einer Umgebung von 0 beschränkt ist. Wir wissen, dass $|f(a)| \leq n$ für $a \in A_n$ und $|A_n| > 0$. Nach dem Satz von Steinhaus gibt es ein $\delta > 0$ mit $(-\delta, \delta) \subset A_n - A_n$. Jedes $x \in (-\delta, \delta)$ kann somit in der Form $x = a - a'$ mit $a, a' \in A_n$ dargestellt werden und

$$|f(x)| = |f(a - a')| = |f(a) - f(a')| \leq |f(a)| + |f(a')| \leq 2n.$$

Somit ist f auf dem Intervall $(-\delta, \delta)$ durch $2n$ beschränkt.

Schritt 3. Wir zeigen, dass $|f|$ an der Stelle 0 stetig ist. Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig und $|t| < \delta/m$. Somit gilt $tm \in (-\delta, \delta)$ und $|f(tm)| \leq 2n$. Auf der anderen Seite gilt wegen der Additivität von f

$$f(tm) = f(t) + \ldots + f(t) = mf(t).$$

Es folgt, dass $|f(t)| < 2n/m$ für alle t mit $|t| < \delta/m$. Für $m \to \infty$ erhalten wir $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Somit ist f stetig an der Stelle 0.

Schritt 4. Nun können wir den Satz von Darboux anwenden. $\square$

Eine analoge Aussage gilt für multiplikative Funktionen.

Korollar 2.4.2. Sei g eine multiplikative und messbare Funktion. Dann hat g die Form $g(x) = x^c$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Beweis. Die Funktion $f(x) = \log g(\mathrm{e}^x)$ ist additiv und messbar. Nach dem Satz von Ostrowski hat sie die Form $f(x) = cx$, woraus sich $g(x) = \mathrm{e}^{f(\log x)} = x^c$ ergibt.

2.5. Hamel–Funktionen

Wir haben gezeigt, dass jede additive Funktion f die Form $f(x) = cx$ hat, wenn man eine zusätzliche Bedingung (wie z.B. Messbarkeit) an f stellt. Kann man die zusätzlichen Bedingungen komlett entfernen? Erstaunlicherweise ist die Antwort negativ.

Beispiel 2.5.1 (Hamel, 1905)**.** Wir konstruieren eine additive Funktion f, die nicht die Form $f(x) = cx$ hat.

$\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ hat Dimension 1. Man kann aber $\mathbb{R}$ auch als einen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen betrachten. Nach einem allgemeinen Satz aus der Algebra hat jeder Vektorraum über jedem Körper eine Basis. Das heißt, es gibt eine Menge B mit der Eigenschaft, dass jedes $x \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Darstellung

$$x = r_1 b_1 + \ldots + r_n b_n$$

mit passenden $n \in \mathbb{N}$, $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q} \backslash \{0\}$ und $b_1, \ldots, b_n \in B$ besitzt.

Wir definieren nun eine additive Funktion indem wir ihre Werte auf der Basis B beliebig vorgeben und sie dann linear (über $\mathbb{Q}$!) auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen. Sei $b_0 \in B$ beliebig. Definiere $f(b_0) = 1$ und $f(b) = 0$ für alle $b \in B \backslash \{b_0\}$. Die lineare (über $\mathbb{Q}$!) Fortsetzung von f ist definiert durch

$$f(x) = r_1 f(b_1) + \ldots + r_n f(b_n).$$

Diese Funktion ist additiv per Definition. Allerdings hat sie nicht die Form $x \mapsto cx$, denn sie ist nicht identisch gleich 0 (was die Möglichkeit $c = 0$ ausschließt) und sie hat unendlich viele Nullstellen (wohingegen die Funktion $x \mapsto cx$ nur eine Nullstelle für $c \neq 0$ hat).

Die so konstruierte Funktion f ist nicht messbar (nach dem Satz von Ostrowski), nirgends stetig (nach dem Satz von Darboux), auf keinem Intervall monoton (Aufgabe 2.2.3), unbeschränkt auf jedem Intervall und sogar auf jeder Menge mit positivem Maß (das folgt aus dem Beweis des Satzes von Ostrowski). Sie ist ein wahres Monstrum.