KAPITEL 10

Konvergenz von Punktprozessen

In diesem Kapitel werden wir Verteilungskonvergenz der Punktprozesse einführen und einige Beispiele betrachten, in denen Poisson–Prozesse als Grenzwerte von Punktprozessen der "seltenen Ereignisse" entstehen. Unsere Darstellung ist sehr unvollständig, für mehr Einzelheiten verweisen wir auf das Buch von S. Resnick *"Extreme values, regular variation and point processes"*.

10.1. Vage Konvergenz

Im Folgenden sei E ein lokal kompakter separabler metrischer Raum. Zuerst werden wir einen Konvergenzbegriff für Radon–Maße auf E (und somit auch für Zählmaße auf E) einführen.

Definition 10.1.1. Eine Menge $B \subset E$ heißt **relativ kompakt**, wenn ihr Abschluss $\bar{B}$ kompakt ist.

Beispiel 10.1.2. Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^d$ ist relativ kompakt genau dann, wenn sie beschränkt ist.

Definition 10.1.3. Eine Folge von Radon–Maßen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ auf E konvergiert **vage** gegen ein Radon–Maß μ, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B)$$

für alle relativ kompakten Borel–Mengen $B \subset E$ mit $\mu(\partial B) = 0$. Bezeichnung: $\mu_n \underset{n\to\infty}{\overset{v}{\longrightarrow}} \mu$.

Warum in obiger Definition $\pi(\partial B) = 0$ gelten muss, soll folgendes Beispiel veranschaulichen.

Beispiel 10.1.4. Betrachte folgende Radon–Maße auf $\mathbb{R}$: $\mu_n = \delta_{1/n}$ und $\mu = \delta_0$. Für das offene Intervall $B = (0, 2)$ gilt $\mu_n(B) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\mu(B) = 0$. Hätten wir in der Definition der vagen Konvergenz die Forderung $\mu(\partial B) = 0$ weggelassen, so würde μ_n nicht gegen μ konvergieren. Das wäre ein sehr unnatürlicher Konvergenzbegriff.

Hier sind einige einfache Beispiele der vagen Konvergenz.

Beispiel 10.1.5. Sei μ_n das Maß mit der Dichte $\mathbb{1}_{[-n,n]}$ auf $\mathbb{R}$. Dann konvergiert μ_n vage gegen das Lebesgue–Maß auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 10.1.6. Sei $\mu_n = \delta_n$. Dann konvergiert μ_n vage gegen das Null–Maß.

Wir werden nun eine äquivalente Definition der vagen Konvergenz formulieren. Zuerst müssen wir stetige Funktionen mit kompaktem Träger definieren, die wir als "Testfunktionen" benutzen werden.

Definition 10.1.7. Eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ hat **kompakten Träger**, falls es eine kompakte Menge $K \subset E$ gibt mit $f(t) = 0$ für alle $t \in E \backslash K$.

Definition 10.1.8. Die Menge aller stetigen Funktionen auf E mit kompaktem Träger sei mit $C_c(E)$ bezeichnet. Es sei $C_c^+(E)$ die Menge aller $f \in C_c(E)$ mit $f \geq 0$.

Nun formulieren wir eine äquivalente Definition der vagen Konvergenz.

Satz 10.1.9. Seien $\mu_1, \mu_2, \ldots$ und μ Radon–Maße auf E. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) $\mu_n \underset{n\to\infty}{\overset{v}{\longrightarrow}} \mu$.

(2) Für alle $f \in C_c^+(E)$ gilt $\lim_{n\to\infty} \int_E f(x)\mu_n(\mathrm{d}x) = \int_E f(x)\mu(\mathrm{d}x)$.

Beweis. Weggelassen. □

Aufgabe 10.1.10. Zeigen Sie, dass man im obigen Satz $C_c^+(E)$ durch $C_c(E)$ ersetzen kann.

Beispiel 10.1.11. Sei $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{i/n}$. Dann konvergiert μ_n vage gegen das Lebesgue–Maß auf $\mathbb{R}$. In der Tat, für jedes $f \in C_c(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_n(\mathrm{d}t) = \frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{i}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{d}t,$$

da Riemann–Summen gegen das Riemann–Integral konvergieren.

10.2. Verteilungskonvergenz von Punktprozessen

Sei π ein Punktprozess (= ein zufälliges Zählmaß) auf E und seien $B_1, \ldots, B_k \subset E$ kompakte Mengen. Dann ist $(\pi(B_1), \ldots, \pi(B_k))$ ein k-dimensionaler Zufallsvektor mit Werten in $\mathbb{N}_0^k$. Vektoren dieser Art heißen auch **endlich-dimensionale Verteilungen** von π.

Wir definieren nun die Verteilungskonvergenz von Punktprozessen.

Definition 10.2.1. Seien $\pi, \pi_1, \pi_2, \dots$ Punktprozesse auf E. Wir sagen, dass π_n gegen π in Verteilung konvergiert, falls für alle relativ kompakten Borel–Mengen $B_1, \dots, B_k$ mit $\pi(\partial B_i) = 0$ f.s. gilt, dass

$$(\pi_n(B_1), \dots, \pi_n(B_k)) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (\pi(B_1), \dots, \pi(B_k)).$$

Mit anderen Worten gilt für alle $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}_0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\pi_n(B_1) = m_1, \dots, \pi_n(B_k) = m_k] = \mathbb{P}[\pi(B_1) = m_1, \dots, \pi(B_k) = m_k].$$

Bezeichnung: $\pi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \pi$.

Die Bedingung in der obigen Definition ist nicht leicht zu überprüfen. Es ist viel angenehmer, die folgende Charakterisierung der Verteilungskonvergenz von Punktprozessen zu benutzen.

Satz 10.2.2. Seien $\pi_1, \pi_2, \dots$ und π Punktprozesse auf E, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) $\pi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \pi$.

(2) Für alle $f \in C_c^+(E)$ gilt $\sum_{x\in\pi_n} f(x) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \sum_{x\in\pi} f(x)$.

(3) Für alle $f \in C_c^+(E)$ gilt $\lim_{n\to\infty} \pi_{\pi_n}(f) = \psi_\pi(f)$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{x\in\pi_n} f(x)\right\}\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{x\in\pi} f(x)\right\}\right].$$

Beweis. Weggelassen. □

Bemerkung 10.2.3. Um die Verteilungskonvergenz der Punktprozesse zu zeigen, reicht es also die Konvergenz der Laplace–Funktionale für jede Testfunktion $f \in C_c^+(E)$ nachzuweisen.

Im Folgenden werden wir eine Reihe von Beispielen der Verteilungskonvergenz von Punktprozessen betrachten.

10.3. Bernoulli–Experimente mit kleiner Erfolgswahrscheinlichkeit

Wir betrachten eine Serie aus unabhängigen Bernoulli–Experimenten mit einer sehr kleinen Erfolgswahrscheinlichkeit p. Die Erfolge in einer solchen Serie sind dementsprechend sehr selten, denn die mittlere Wartezeit auf den ersten Erfolg ist $1/p$. Wir interessieren uns für den Punktprozess der Zeitpunkte $T_1, T_2, \dots$, zu denen man Erfolge beobachtet. Der nächste Satz behauptet, dass der Punktprozess, der aus den Punkten $pT_1, pT_2, \dots$ besteht, für kleines p durch einen Poisson–Punktprozess mit Intensität 1 approximiert werden kann.

Satz 10.3.1. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Folge ε_{ni}, $i \in \mathbb{Z}$, von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}[\varepsilon_{ni} = 1] = p_n, \quad \mathbb{P}[\varepsilon_{ni} = 0] = 1 - p_n$$

gegeben, wobei $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda \in [0, \infty)$. Dann gilt die folgende Verteilungskonvergenz von Punktprozessen auf $\mathbb{R}$:

$$\pi_n := \sum_{i\in\mathbb{Z}} \varepsilon_{ni}\delta_{\frac{i}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{PPP}(\lambda \mathrm{d}t).$$

Beweis. Wir werden Satz 10.2.2 benutzen. Für $f \in C_c^+(\mathbb{R})$ definieren wir die Laplace–Funktionale

$$\psi_n(f) = \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{x\in\pi_n} f(x)\right\}\right], \quad \psi(f) = \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{x\in\pi} f(x)\right\}\right],$$

wobei π ein homogener Poisson–Punktprozess auf $\mathbb{R}$ mit konstanter Intensität λ sei. Es reicht zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} \psi_n(f) = \psi(f)$. Wegen der Unabhängigkeit der Familie ε_{ni}, $i \in \mathbb{Z}$, gilt:

$$\psi_n(f) = \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{i\in\mathbb{Z}} \varepsilon_{ni} f\left(\frac{i}{n}\right)\right\}\right] = \mathbb{E}\prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\varepsilon_{ni} f(\frac{i}{n})} = \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\mathrm{e}^{-\varepsilon_{ni} f(\frac{i}{n})} = \prod_{i\in\mathbb{Z}} (1+p_n(\mathrm{e}^{-f(\frac{i}{n})}-1)).$$

Mit der Approximation $\log(1 + x) = x + o(x)$ (für $x \to 0$) ergibt sich

$$\log \psi_n(f) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \log(1 + p_n(\mathrm{e}^{-f(\frac{i}{n})} - 1)) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} p_n(\mathrm{e}^{-f(\frac{i}{n})} - 1) + R_n,$$

wobei R_n ein Restterm ist, für den wir später zeigen werden, dass $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$. Es folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \log \psi_n(f) = \lim_{n\to\infty} (np_n) \cdot \frac{1}{n} \sum_{i\in\mathbb{Z}} (\mathrm{e}^{-f(\frac{i}{n})} - 1) = \lambda \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{-f(t)} - 1)\mathrm{d}t,$$

wobei letzteres einfach die Definition des Riemann–Integrals ist. Zusammenfassend gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(f) = \exp\left\{-\lambda \int_{\mathbb{R}} (1 - \mathrm{e}^{-f(t)})\mathrm{d}t\right\},$$

was dem Laplace–Funktional eines Poisson–Punktprozesses mit Intensität λ entspricht. Mit Satz 10.2.2 folgt, dass

$$\pi_n := \sum_{i\in\mathbb{Z}} \varepsilon_{ni}\delta_{\frac{i}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{PPP}(\lambda \mathrm{d}t).$$

Der Restterm R_n kann wie folgt abgeschätzt werden. Es gilt

$$R_n = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(\log(1 + p_n(\mathrm{e}^{-f(\frac{i}{n})} - 1)) - p_n(\mathrm{e}^{-f(\frac{i}{n})} - 1)\right) \le \frac{1}{2} \sum_{i\in\mathbb{Z}} p_n^2(\mathrm{e}^{-f(\frac{i}{n})} - 1)^2,$$

wobei wir die Ungleichung $|\log(1 + x) - x| \le x^2/2$ für $x > 0$ benutzt haben. Die Funktion f hat einen kompakten Träger, also verschwindet sie außerhalb eines Intervalls $[-A, A]$. Es folgt, dass höchstens $2An$ Werte von $f(i/n)$ (und somit höchstens $2An$ Summanden in der obigen Summe) ungleich 0 sind. Somit ergibt sich

$$|R_n| \leq 2AnMp_n^2 = o(1),$$

wobei M das Supremum von $(\mathrm{e}^{-f} - 1)^2$ ist und wir benutzt haben, dass $\lim_{n\to\infty} np_n^2 = 0$. $\square$

Als Anwendung des obigen Satzes werden wir nun zeigen, dass die Zeitpunkte, zu denen eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen einen sehr hohen Schwellenwert überschreitet, nach einer Normierung gegen einen Poisson–Punktprozess konvergieren.

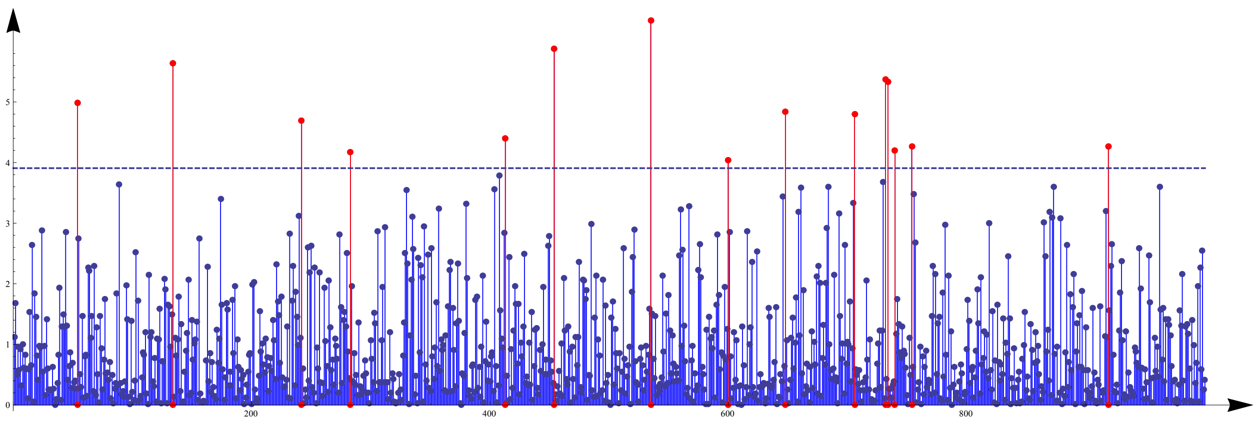

Abbildung 1. Überschreitungen eines hohen Schwellenwerts in einer Folge von u.i.v. Zufallsvariablen

Satz 10.3.2. Seien X_i, $i \in \mathbb{Z}$, u.i.v. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Sei u_n eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(u_n) = \lambda \in [0,\infty)$. Dann gilt die folgende Verteilungskonvergenz von Punktprozessen auf $\mathbb{R}$:

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}: X_i > u_n} \delta_{\frac{i}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{PPP}(\lambda \mathrm{d}t).$$

Beweis. Betrachte die Zufallsvariablen $\varepsilon_{ni} := \mathbb{1}_{X_i > u_n}$, $i \in \mathbb{Z}$. Diese nehmen Werte 0 und 1 an, und es sei $p_n := \mathbb{P}[\varepsilon_{ni} = 1]$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}[\varepsilon_{ni} = 1] = \lim_{n\to\infty} n\bar{F}(u_n) = \lambda.$$

Damit sind die Bedingungen von Satz 10.3.1 erfüllt und die Behauptung folgt. $\square$

10.4. Konvergenz der Binomialpunktprozesse gegen die Poisson–Punktprozesse

In diesem Abschnitt beweisen wir einen allgemeinen Satz über die Konvergenz einer Folge von Binomialpunktprozessen gegen einen Poisson–Punktprozess.

Satz 10.4.1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien $Y_{n1}, \dots, Y_{nn} : \Omega \to E$ u.i.v. Zufallselemente mit Werten in E und Verteilung μ_n. D.h. μ_n sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf E mit $\mu_n(B) = \mathbb{P}[Y_{n1} \in B]$ für alle Borel–Mengen $B \subset E$. Es gelte außerdem für ein Radon–Maß μ auf E, dass

$$n\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{v} \mu.$$

Dann gilt die folgende Verteilungskonvergenz von Punktprozessen auf E:

$$\pi_n := \sum_{i=1}^{n} \delta_{Y_{ni}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{PPP}(\mu).$$

Beispiel 10.4.2. Seien $Y_{n1}, \dots, Y_{nn}$ gleichverteilt auf dem Quadrat $[0, \sqrt{n}]^2$. Dann ist μ_n ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit der Dichte $\frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]^2}$ und man kann leicht zeigen, dass $n\mu_n$ vage gegen das Lebesgue–Maß auf der Viertelebene $[0,\infty)^2$ konvergiert. Es folgt, dass $\sum_{i=1}^{n} \delta_{Y_{ni}}$ gegen einen Poisson–Punktprozess mit Intensität 1 auf der Viertelebene konvergiert.

Beweis von Satz 10.4.1. Sei $f \in C_c^+(E)$, dann gilt

$$\psi_n(f) := \mathbb{E}\exp\left\{-\sum_{x\in\pi_n} f(x)\right\} = \mathbb{E}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} f(Y_{ni})\right\} = \mathbb{E}\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-f(Y_{ni})}.$$

Wegen der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $Y_{n1}, \dots, Y_{nn}$ kann man diesen Ausdruck wie folgt schreiben:

$$\psi_n(f) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\mathrm{e}^{-f(Y_{ni})} = \prod_{i=1}^{n} \int_E \mathrm{e}^{-f(t)}\mu_n(\mathrm{d}t) = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{\int_E (1-\mathrm{e}^{-f(t)})n\mu_n(\mathrm{d}t)}{n}\right).$$

Wegen $n\mu_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{v} \mu(t)$ für $n \to \infty$ folgt schließlich:

$$\psi_n(f) = \left(1 - \frac{\int_E (1-\mathrm{e}^{-f(t)})n\mu_n(\mathrm{d}t)}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left\{-\int_E (1-\mathrm{e}^{-f(t)})\mu(\mathrm{d}t)\right\},$$

was das Laplace–Funktional eines Poisson–Punktprozesses mit Intensität μ ist. Mit Satz 10.2.2 folgt, dass π_n in Verteilung gegen $\mathrm{PPP}(\mu)$ konvergiert. □

10.5. Konvergenz der extremen Ordnungsstatistiken: Gumbel–Fall

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass die oberen extremen Ordnungsstatistiken einer u.i.v. Stichprobe aus dem Gumbel–Max–Anziehungsbereich durch einen Poisson–Punktprozess approximiert werden können. Die beiden anderen Max–Anziehungsbereiche werden im nächsten Abschnitt behandelt.

Satz 10.5.1. Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. Zufallsvariablen aus dem Max–Anziehungsbereich der Gumbel–Verteilung $\Lambda(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$, d.h. es gebe Folgen $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\} - a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \Lambda. \tag{10.5.1}$$

Dann gilt die folgende Verteilungskonvergenz der Punktprozesse auf $\mathbb{R}$:

$$\pi_n := \sum_{i=1}^{n} \delta_{\frac{X_i - a_n}{b_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{PPP}(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t).$$

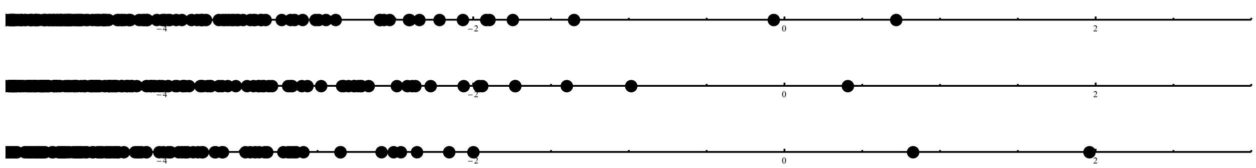

ABBILDUNG 2. Drei unabhängige Realisierungen des Poisson–Punktprozesses mit Intensität e^{-t} auf $\mathbb{R}$. Das Bild zeigt das Intervall $[-5, 3]$.

Bemerkung 10.5.2. Sei π der Poisson–Punktprozess mit Intensität e^{-t} auf $\mathbb{R}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Anzahl der Punkte von π im Intervall (x, ∞) fast sicher endlich, denn es gilt

$$\pi((x,\infty)) \sim \mathrm{Poi}\left(\int_x^\infty \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Poi}(\mathrm{e}^{-x}).$$

Insbesondere ist die erwartete Anzahl der Punkte auf der positiven Halbachse gleich 1. Auf der anderen Seite, ist die Anzahl der Punkte im Intervall $(-\infty, x)$ fast sicher unendlich, denn

$$\pi((-\infty,x)) \sim \mathrm{Poi}\left(\int_{-\infty}^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Poi}(\infty).$$

Wir können also die Punkte von π absteigend anordnen: $Y_1 > Y_2 > \ldots$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} Y_n = -\infty$. Wie ist nun Y_1 verteilt? Der obige Satz lässt vermuten, dass Y_1 eine Gumbel–Verteilung haben sollte. Das ist in der Tat richtig, denn

$$\mathbb{P}[Y_1 \le x] = \mathbb{P}[\pi((x,\infty)) = 0] = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}},$$

da $\pi((x,\infty)) \sim \mathrm{Poi}(\mathrm{e}^{-x})$.

Aufgabe 10.5.3. Bestimmen Sie die Verteilung von Y_k, $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 10.5.4. Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte des Vektors $(Y_1, \ldots, Y_k)$.

BEWEISIDEE VON SATZ 10.5.1. Wir wissen, dass die Konvergenz in (10.5.1) genau dann gilt, wenn

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}[X_1 > a_n + tb_n] = \mathrm{e}^{-t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir definieren $Y_{ni} := \frac{X_i - a_n}{b_n}$ für $i = 1, \dots, n$ und $\mu_n(B) := \mathbb{P}[Y_{n1} \in B]$ für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann gilt für Mengen B der Form $[t, \infty)$:

$$n\mu_n([t,\infty)) = n\mathbb{P}[Y_{n1} \geq t] = n\mathbb{P}\left[\frac{X_1 - a_n}{b_n} \geq t\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-t}.$$

Betrachten wir als nächstes Mengen B der Form $[t_1, t_2)$:

$$n\mu_n([t_1,t_2)) = n \cdot \mu_n([t_1,\infty)) - n \cdot \mu_n([t_2,\infty)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-t_1} - \mathrm{e}^{-t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \mu([t_1,t_2)).$$

Dieser Beweislogik folgend lässt sich die Konvergenz auch für beliebige relativ kompakte Borel–Mengen $B \subset \mathbb{R}$ zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} n\mu_n(B) = \mu(B),$$

worauf wir hier verzichten wollen. Mit Satz 10.4.1 folgt die Behauptung. □

Beispiel 10.5.5. Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige und identisch exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter 1, d.h. $\mathbb{P}[X_i > t] = \mathrm{e}^{-t}$ für $t > 0$. Dann gilt nach Satz **??**

$$\max\{X_1, \dots, X_n\} - \log n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}.$$

Mit Satz 10.5.1 folgt nun

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i - \log n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{PPP}(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t).$$

Beispiel 10.5.6. Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige und identisch standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Wir haben bereits gezeigt, dass

$$\sqrt{2\log n}\,(\max\{X_1, \dots, X_n\} - a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$$

mit $a_n = \sqrt{2\log n} - \frac{\frac{1}{2}\log\log n + \log 2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\log n}}$. Es folgt mit Satz 10.5.1, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{\sqrt{2\log n}\,(X_i - a_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{PPP}(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t).$$

Im nächsten Satz geben wir eine explizite Konstruktion des Poisson–Punktprozesses $\pi \sim \mathrm{PPP}(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t)$ als eine Transformation des homogenen Poisson–Punktprozesses $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_{P_n}$ mit Intensität 1 an.

Proposition 10.5.7. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_{P_n}$ ein homogener Poisson–Punktprozess mit Intensität 1 auf $(0, \infty)$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_{-\log P_n} \sim \mathrm{PPP}(\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t).$$

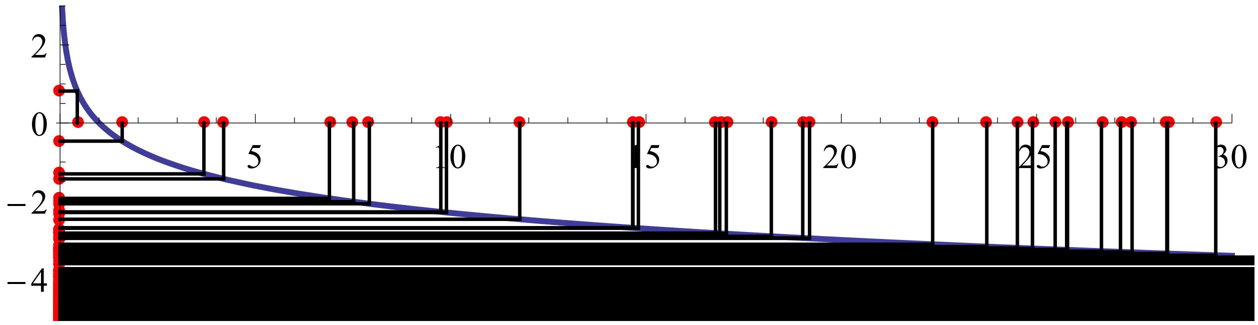

Abbildung 3. Poisson–Punktprozess mit Intensität 1 (horizontale Achse) wird mit der Transformation $T(x) = -\log x$ auf den Poisson–Punktprozess mit Intensität e^{-t} (vertikale Achse) transformiert.

Beweis. Wir benutzen den Transformationssatz für Poisson–Punktprozesse für die Abbildung $T : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $T(x) = -\log x$. Sei ν das Lebesgue–Maß auf $(0, \infty)$. Mit dem Transformationssatz für Poisson–Punktprozesse folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_{T(P_n)} \sim \mathrm{PPP}(T\nu).$$

Wir müssen noch nachweisen, dass die Dichte des Bildmaßes $T\nu$ gleich e^{-t} ist. Es gilt

$$(T\nu)((a, b)) = \nu(T^{-1}((a, b))) = \nu((\mathrm{e}^{-b}, \mathrm{e}^{-a})) = \mathrm{e}^{-a} - \mathrm{e}^{-b} = \int_a^b \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t.$$

Deshalb folgt die Behauptung. □

Aus der Konvergenz der Punktprozesse in Satz 10.5.1 folgt die Konvergenz der extremen Ordnungsstatistiken. Wir werden hier keinen exakten Beweis geben. Die Idee besteht darin, dass man die extremen Ordnungsstatistiken als ein stetiges Funktional des Punktprozesses ansehen kann. Nach dem Satz über die stetige Abbildung folgt aus der Verteilungskonvergenz der Punktprozesse die Verteilungskonvergenz der extremen Ordnungsstatistiken. Wir erinnern an die Notation $M_n^{(k)} = X_{n-k+1:n}$, $k = 1, \dots, n$.

Korollar 10.5.8. Unter Voraussetzungen von Satz 10.5.1 gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{M_n^{(1)} - a_n}{b_n}, \dots, \frac{M_n^{(k)} - a_n}{b_n} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (Y_1, \dots, Y_k),$$

wobei $Y_1 > Y_2 > \dots$ die Punkte des Poisson–Punktprozesses π mit Intensität e^{-t} auf $\mathbb{R}$ seien.

10.6. Konvergenz der extremen Ordnungsstatistiken: Fréchet und Weibull–Fall

In Satz 10.5.1 haben wir Zufallsvariablen aus dem Max–Anziehungsbereich der Gumbel–Verteilung betrachtet. Nun formulieren wir einen ähnlichen Satz für den Max–Anziehungsbereich der Fréchet–Verteilung.

Satz 10.6.1. Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. Zufallsvariablen aus dem Max–Anziehungsbereich der Fréchet–Verteilung Φ_α, $\alpha > 0$, d.h. es gebe eine Folge $b_n > 0$ mit

$$\frac{\max\{X_1, \dots, X_n\}}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \Phi_\alpha. \tag{10.6.1}$$

Dann gilt die folgende Konvergenz der Punktprozesse auf $(0,\infty)$:

$$\sum_{i=1}^{n}{}' \delta_{\frac{X_i}{b_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{PPP}\left(\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t\right).$$

Dabei bedeutet die Notation $\sum'$, dass alle Punkte X_i mit $X_i \le 0$ aus der Summe per Konvention ausgeschlossen werden.

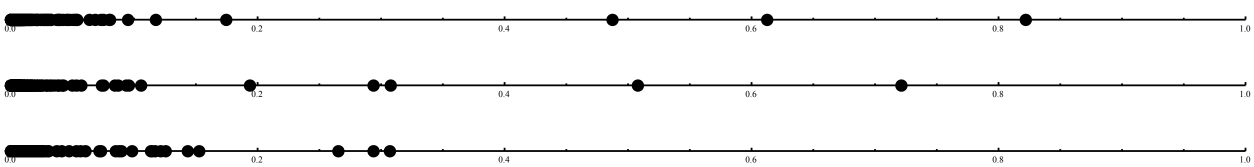

Abbildung 4. Drei unabhängige Realisierungen des Poisson–Punktprozesses mit Intensität $t^{-2}\mathrm{d}t$ auf $(0,\infty)$. Das Bild zeigt das Intervall $[0,1]$.

Bemerkung 10.6.2. Sei π der Poisson–Punktprozess mit Intensität $\alpha t^{-(\alpha+1)}$ auf $(0,\infty)$. Für jedes $x > 0$ ist die Anzahl der Punkte von π im Intervall (x,∞) fast sicher endlich, denn es gilt

$$\pi((x,\infty)) \sim \mathrm{Poi}\left(\int_x^\infty \alpha t^{-(\alpha+1)}\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Poi}(x^{-\alpha}).$$

Auf der anderen Seite ist die Anzahl der Punkte im Intervall $(0,x)$ fast sicher unendlich, denn

$$\pi((0,x)) \sim \mathrm{Poi}\left(\int_0^x \alpha t^{-(\alpha+1)}\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Poi}(\infty).$$

Aufgabe 10.6.3. Es sei $Y_1 > Y_2 > \ldots > 0$ die absteigende Anordnung der Punkte von π. Zeigen Sie, dass Y_1 Fréchet–verteilt mit Parameter α ist. Bestimmen Sie die Verteilung von Y_k, $k \in \mathbb{N}$, und die gemeinsame Verteilung von $(Y_1, \dots, Y_k)$.

Beweisidee von Satz 10.6.1. Bedingung (10.6.1) gilt genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}[X_1 \ge b_n t] = \frac{1}{t^\alpha}$$

für alle $t > 0$. Wir definieren die Zufallsvariablen $Y_{ni} = \frac{X_i}{b_n} \mathbb{1}_{X_i > 0}$. Es sei μ_n die Verteilung von Y_{ni}. Wir betrachten zuerst Mengen der Form $[t, \infty)$:

$$n\mu_n([t,\infty)) = n\mathbb{P}[Y_{ni} \geq t] = n\mathbb{P}[X_1 \geq tb_n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{t^\alpha}.$$

Betrachten wir nun Mengen der Form $[t_1, t_2)$ mit $0 < t_1 < t_2$:

$$n\mu_n([t_1,t_2)) = n\mu_n([t_1,\infty)) - n\mu_n([t_2,\infty)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{t_1^\alpha} - \frac{1}{t_2^\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} \mathrm{d}t.$$

Dieser Beweislogik folgend lässt sich die Konvergenz auch für beliebige relativ kompakte Borel–Mengen $B \subset (0, \infty)$ zeigen, worauf wir hier verzichten wollen. Es folgt:

$$\lim_{n\to\infty} n\mu_n(B) = \int_B \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} \mathrm{d}t.$$

Damit ist Satz 10.4.1 anwendbar und die Behauptung ist bewiesen. □

Beispiel 10.6.4. Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. Pareto-verteilt mit Parameter $\alpha > 0$, d.h. $\mathbb{P}[X_i > t] = \frac{1}{t^\alpha}$ für alle $t > 1$. Wir haben in Satz **??** gezeigt, dass Pareto–verteilte Zufallsvariablen im Max–Anziehungsbereich der Fréchet–Verteilung liegen, nämlich

$$\frac{\max\{X_1,\ldots,X_n\}}{n^{1/\alpha}} \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} \Phi_\alpha.$$

Mit Satz 10.6.1 gilt dann auf $(0, \infty)$:

$$\sum_{i=1}^n \delta_{\frac{X_i}{n^{1/\alpha}}} \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} \mathrm{PPP}\left(\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t\right).$$

Beispiel 10.6.5. Es seien $X_1, X_2, \ldots$ Cauchy–verteilt mit Dichte $\frac{1}{\pi(1+t^2)}$, $t \in \mathbb{R}$. Wir wissen, dass

$$\frac{\max\{X_1,\ldots,X_n\}}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} \Phi_\alpha.$$

Somit folgt aus Satz 10.6.1, dass auf $(0, \infty)$

$$\sum_{\substack{i=1,\ldots,n\\X_i>0}} \delta_{\frac{X_i}{n}} \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} \mathrm{PPP}\left(\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t\right).$$

Aus Symmetriegründen folgt aber auch, dass auf $(-\infty, 0)$

$$\sum_{\substack{i=1,\ldots,n\\X_i<0}} \delta_{\frac{X_i}{n}} \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} \mathrm{PPP}\left(\frac{\alpha}{(-t)^{\alpha+1}}\mathrm{d}t\right).$$

Man kann sogar beide Fälle vereinigen und zeigen, dass auf $E = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt

$$\sum_{i=1}^n \delta_{\frac{X_i}{n}} \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} \mathrm{PPP}\left(\frac{\alpha}{|t|^{\alpha+1}}\mathrm{d}t\right).$$

Es sei bemerkt, dass wir den Punkt 0 ausschließen müssen, denn die Punkte des Poisson–Punktprozesses auf der rechten Seite häufen sich an der Stelle 0.

Zum Schluss betrachten wir noch den Max–Anziehungsbereich der Weibull–Verteilung Ψ_α.

Satz 10.6.6. Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. Zufallsvariablen aus dem Max–Anziehungsbereich der Weibull–Verteilung Ψ_α, $\alpha > 0$, d.h. der rechte Endpunkt x^* sei endlich und es gebe eine Folge $b_n > 0$ mit

$$\frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\} - x^*}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \Psi_\alpha.$$

Dann gilt die folgende Konvergenz von Punktprozessen auf $(-\infty, 0)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{\frac{X_i - x^*}{b_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \text{PPP}\left(\alpha(-t)^{\alpha-1}\mathrm{d}t\right).$$

Beweis. Weggelassen. □

Beispiel 10.6.7. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch gleichverteilt auf $[0, 1]$. Es gilt:

$$n(\max\{X_1, \ldots, X_n\} - 1) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{e}^x = \Psi_1(x), \qquad x < 0.$$

Dann folgt aus Satz 10.6.6, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{n(X_i - 1)} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \text{PPP}(\mathrm{d}t) \text{ auf } (-\infty, 0).$$

Aus Symmetriegründen gilt auch

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{nX_i} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \text{PPP}(\mathrm{d}t) \text{ auf } (0, \infty).$$

10.7. Konvergenz der Rekordzeiten gegen einen Poisson–Punktprozess

Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion F. Wir benutzen die Notation $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ für das Maximum der ersten n Zufallsvariablen bzw. $\xi_j = \mathbb{1}_{X_j > M_{j-1}}$, $j = 1, 2, \ldots$ für die Indikatorvariable des Ereignisses, dass zum Zeitpunkt j ein neuer Rekord aufgestellt wird. Die ebenfalls bereits behandelten Rekordzeiten $L(1), L(2), \ldots$ werden weiterhin wie folgt definiert: $L(1) = 1$ und

$$L(n+1) = \min\{j > L(n) : \xi_j = 1\}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Der nächste Satz behauptet, dass die Folge der Rekordzeiten wie ein Poisson–Punktprozess aussieht, wenn man sie aus einer sehr großen Entfernung betrachtet.

Satz 10.7.1. Es gilt

$$\pi_n := \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{\frac{L(i)}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \text{PPP}\left(\frac{\mathrm{d}t}{t}\right) \text{ auf } (0, \infty).$$

Beweis. Wir zeigen die Konvergenz der Laplace–Funktionale. Sei $f \in C_c^+(0,\infty)$. Es gilt

$$\psi_n(f) := \mathbb{E}\exp\left\{-\sum_{x\in\pi_n} f(x)\right\} = \mathbb{E}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{\infty} f\left(\frac{L(i)}{n}\right)\right\} = \mathbb{E}\exp\left\{-\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j f\left(\frac{j}{n}\right)\right\},$$

weil ξ_j immer dann 0 ist, wenn kein Rekord an Stelle j vorliegt. Man kann obiges auch wie folgt schreiben und wegen der Unabhängigkeit der ξ_j nach Satz von Rényi umformen:

$$\psi_n(f) = \mathbb{E}\prod_{j=1}^{\infty}\exp\left\{-\xi_j f\left(\frac{j}{n}\right)\right\} = \prod_{j=1}^{\infty}\mathbb{E}\exp\left\{-\xi_j f\left(\frac{j}{n}\right)\right\} = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{j}+\frac{1}{j}\mathrm{e}^{-f(\frac{j}{n})}\right),$$

wobei sich die letzte Gleichheit ergibt, da ebenfalls mit dem Satz von Rényi $\mathbb{P}[\xi_j = 1] = 1 - \mathbb{P}[\xi_j = 0] = \frac{1}{j}$ gilt. Es folgt:

$$\log\psi_n(f) = \sum_{j=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{j}\left(\mathrm{e}^{-f(\frac{j}{n})}-1\right)\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left(\mathrm{e}^{-f(\frac{j}{n})}-1\right) + R_n,$$

wobei hier R_n ein Restterm ist, der, wie wir später zeigen werden, gegen 0 geht, und wir die Taylorentwicklung $\log(1+x) = x + o(x)$ im Auge behalten. Definiert man

$$g\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{1}{j/n}\left(\mathrm{e}^{-f(\frac{j}{n})}-1\right)$$

und lässt n gegen unendlich gehen, so folgt:

$$\log\psi_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{n}{j}\left(\mathrm{e}^{-f(\frac{j}{n})}-1\right) + R_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{\infty} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-f(t)}-1\right)\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

wobei wir hier die Konvergenz einer Riemann–Summe gegen das Riemann–Integral benutzt haben. Schließlich ist zu beobachten, dass

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(t) = \exp\left\{-\int_0^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-f(t)}-1\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\},$$

was die Laplace–Transformierte eines Poisson–Punktprozesses auf $(0,\infty)$ mit Intensität $\frac{1}{t}$ ist. Zu zeigen ist nur noch, dass $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$. Mit der Ungleichung $|\log(1+x)-x| \leq \frac{1}{2}x^2$ ergibt sich, dass

$$|R_n| \leq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\left(\mathrm{e}^{-f(\frac{j}{n})}-1\right)^2 = \frac{1}{2n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\infty} g^2\left(\frac{j}{n}\right) \sim \frac{1}{2n}\int_0^{\infty} g^2(t)\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

was die Behauptung beweist. □

10.8. Konvergenz gegen den Extremwertprozess

In den vorherigen Abschnitten haben wir Sätze über die Konvergenz der oberen Ordnungsstatistiken gegen Poisson–Punktprozesse formuliert. Man kann diese Sätze erweitern indem man die Positionen der Beobachtungen berücksichtigt, wo extrem große Werte auftreten.

Satz 10.8.1. Seien $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. Zufallsvariablen aus dem Max–Anziehungsbereich der Gumbel–Verteilung $\Lambda(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$, d.h. es gebe Folgen $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\max\{X_1, \dots, X_n\} - a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \Lambda. \tag{10.8.1}$$

Dann gilt die folgende Verteilungskonvergenz der Punktprozesse auf $[0,1] \times \mathbb{R}$:

$$\pi_n := \sum_{i=1}^{n} \delta_{\left(\frac{i}{n}, \frac{X_i - a_n}{b_n}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{PPP}(\mathrm{d}s \times \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t).$$

Beweis. Weggelassen. □

Der Punktprozess auf der rechten Seite kann wie folgt konstruiert werden. Seien $Y_1 > Y_2 > \dots$ die Punkte des Poisson–Punktprozesses mit Intensität e^{-t} auf $\mathbb{R}$. Unabhängig davon seien $U_1, U_2, \dots$ u.i.v. Zufallsvariablen, die gleichverteilt auf dem Intervall $[0,1]$ sind. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(U_i, Y_i)} \sim \mathrm{PPP}(\mathrm{d}s \times \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t).$$

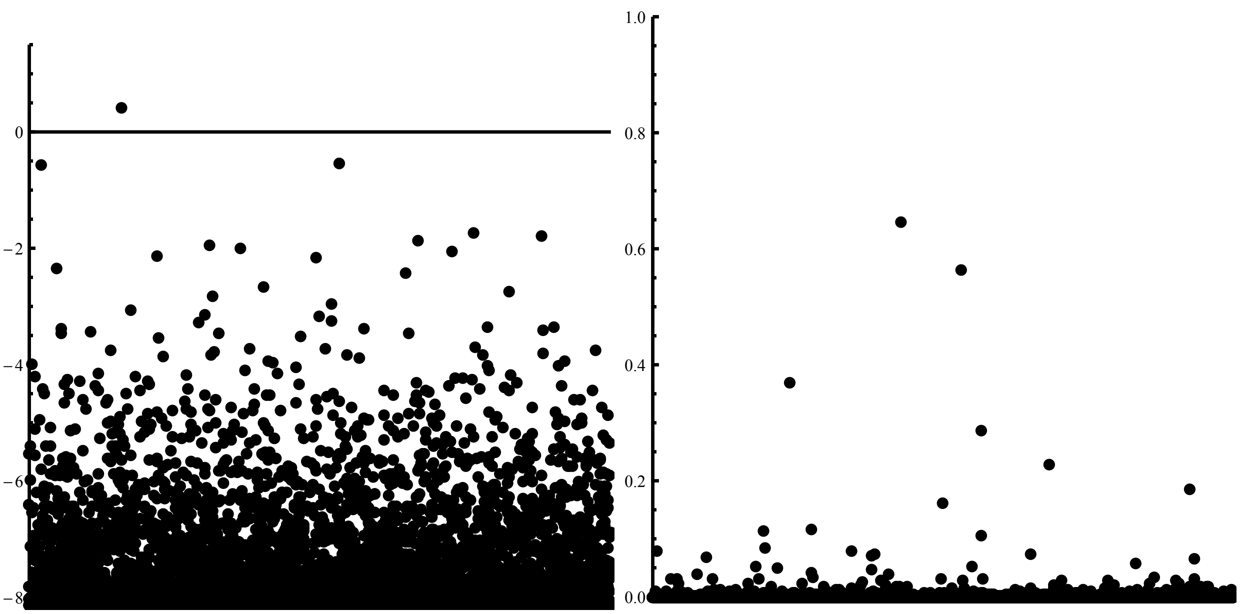

Abbildung 5. Poisson–Punktprozesse aus Sätzen 10.8.1 und 10.8.4.

Der obige Satz macht den folgenden "funktionalen Grenzwertzsatz" für den Maximumsprozess plausibel. Zuerst benötigen wir eine Definition.

Definition 10.8.2. Der stochastische Prozess $\{Z_t\colon t \in [0,1]\}$ mit

$$Z_t = \max_{i\in\mathbb{N}\colon U_i \le t} Y_i$$

heißt der **Gumbel–Extremwertprozess**.

Satz 10.8.3. Unter Voraussetzungen von Satz 10.8.1 konvergiert der Prozess

$$\{(M_{[nt]} - b_n)/a_n\colon t \in [0,1]\}$$

gegen den Gumbel–Extremwertprozess im Sinne der endlich–dimensionalen Verteilungen. D.h. für alle $0 < t_1 < \ldots < t_k \le 1$ gilt

$$\left(\frac{M_{[nt_1]} - b_n}{a_n}, \ldots, \frac{M_{[nt_k]} - b_n}{a_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} (Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_k}).$$

Beweis. Weggelassen. □

Ähnliche Sätze kann man auch für die beiden anderen Max–Anziehungsbereiche formulieren. Wir betrachten hier nur den Fréchet–Fall.

Satz 10.8.4. Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. Zufallsvariablen aus dem Max–Anziehungsbereich der Fréchet–Verteilung Φ_α, $\alpha > 0$, d.h. es gebe eine Folge $b_n > 0$ mit

$$\frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\}}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \Phi_\alpha. \tag{10.8.2}$$

Dann gilt die folgende Konvergenz der Punktprozesse auf $[0,1] \times (0,\infty)$:

$$\sum_{i=1}^{n}{}' \delta_{\left(\frac{i}{n}, \frac{X_i}{b_n}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \text{PPP}\left(\mathrm{d}s \times \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t\right).$$

Dabei bedeutet die Notation $\sum'$, dass alle Punkte X_i mit $X_i \le 0$ aus der Summe per Konvention ausgeschlossen werden.

Beweis. Weggelassen. □

10.9. Allgemeiner Extremwertprozess

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Sei $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Es gilt $M_1 \le M_2 \le M_3 \le \ldots$. Im nächsten Satz beschreiben wir die endlich dimensionalen Verteilungen des Prozesses $M_1, M_2, \ldots$.

Satz 10.9.1. Seien $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$, mit $t_i \in \mathbb{N}_0$ und $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$. Die Verteilung von $(M_{t_1}, \ldots, M_{t_n})$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[M_{t_1} \leq x_1, \ldots, M_{t_k} \leq x_k] \\ &= F^{t_k - t_{k-1}}(x_k) F^{t_{k-1}-t_{k-2}}(\min\{x_{k-1}, x_k\}) \cdot \ldots \cdot F^{t_1}(\min\{x_1, \ldots, x_k\}).\end{aligned}$$

Bemerkung 10.9.2. Es gilt die Markov–Eigenschaft:

$$\mathbb{P}[M_{n+1} \leq u | M_1 = m_1, \ldots, M_n = m_n] = \mathbb{P}[M_{n+1} \leq u | M_n = m_n].$$

Der nächste Satz zeigt, dass man den Maximumsprozess $(M_t)_{t \in \mathbb{N}}$ in einen Extremwertprozess $(Z_t)_{t \geq 0}$ in stetiger Zeit einbetten kann. Es sei x_* bzw. x^* der linke bzw. der rechte Endpunkt der Verteilungsfunktion F.

Satz 10.9.3. Sei $\pi = \sum_{k=1}^\infty \delta_{(X_k, Y_k)} \sim \mathrm{PPP}(\mu)$ auf $[0, \infty) \times (x_*, x^*]$ mit

$$\mu((a,b] \times (c,d]) = (b-a) \cdot (\log F(d) - \log F(c)).$$

Sei $Z_t = \sup\{Y_k : X_k \leq t\}$ mit $t \geq 0$. Dann gilt

$$(M_t)_{t \in \mathbb{N}} \stackrel{d}{=} (Z_t)_{t \in \mathbb{N}}.$$

Beweis. Seien $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ mit $t_i \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$\mathbb{P}[Z_{t_1} \leq u_1, \ldots, Z_{t_k} \leq u_k] = \mathbb{P}[\pi(A_j) = 0 \text{ für alle } j = 1, \ldots, k] = \mathbb{P}\left[\pi\left(\cup_{j=1}^n A_j\right) = 0\right],$$

wobei hier

$$A_j = [t_{j-1}, t_j] \times (\min\{u_k, u_{k-1}, \ldots, u_j\}, x^*).$$

Obiges lässt sich, da π ein Poisson–Punktprozess ist, zu Folgendem vereinfachen:

$$\mathbb{P}[Z_{t_1} \leq u_1, \ldots, Z_{t_k} \leq u_k] = \mathrm{e}^{-\mu\left(\cup_{j=1}^k A_j\right)} = \prod_{j=1}^k \mathrm{e}^{-\mu(A_j)} = \prod_{j=1}^k \mathrm{e}^{(t_j - t_{j-1}) \log F(\min\{u_k, u_{k-1}, \ldots, u_j\})}.$$

Somit gilt

$$\mathbb{P}[Z_{t_1} \leq u_1, \ldots, Z_{t_k} \leq u_k] = \mathbb{P}[M_{t_1} \leq u_1, \ldots, M_{t_k} \leq u_k].$$

□

Beispiel 10.9.4. Für $F(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$ stimmt der Prozess Z_t mit dem oben eingeführten Gumbel–Extremwertprozess überein.

***