KAPITEL 1

Extremwertverteilungen

1.1. Verteilung des Maximums

Seien $X_1, X_2, ...$ unabhängige und identisch verteilte (u.i.v.) Zufallsvariablen.

Definition 1.1.1. Die **Verteilungsfunktion** F von X_i ist definiert durch

$$F(t) = \mathbb{P}[X_i \le t], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die **Tailfunktion** $\bar{F}$ von X_i ist definiert durch

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t) = \mathbb{P}[X_i > t], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Verteilungsfunktion F ist monoton steigend. Die Tailfunktion $\bar{F}$ hingegen ist monoton fallend.

Mit M_n bezeichnen wir das **Maximum** von $X_1, \dots, X_n$:

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

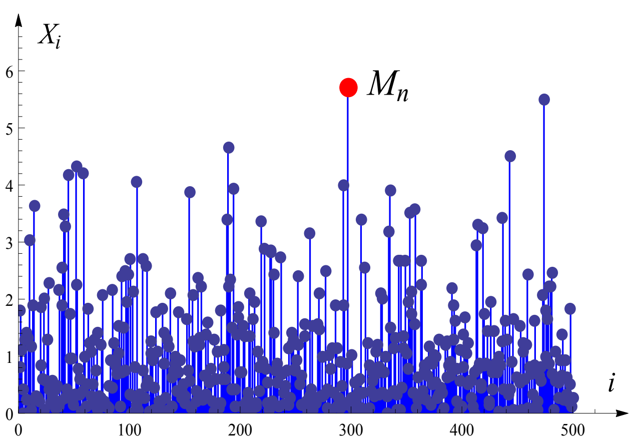

Abbildung 1. Veranschaulichung von M_n.

Satz 1.1.2. Die Verteilungsfunktion von M_n ist gegeben durch

$$\mathbb{P}[M_n \le t] = F^n(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Aus der Definition des Maximums M_n folgt, dass

$$\mathbb{P}[M_n \le t] = \mathbb{P}[\max\{X_1, \dots, X_n\} \le t] = \mathbb{P}[X_1 \le t, \dots, X_n \le t].$$

Da $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt sind, gilt

$$\mathbb{P}[X_1 \le t, \dots, X_n \le t] = \mathbb{P}[X_1 \le t] \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}[X_n \le t] = F^n(t).$$

Zusammen ergibt sich $\mathbb{P}[M_n \le t] = F^n(t)$. □

Aufgabe 1.1.3. Seien $X_1, \dots, X_n$ u.i.v. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion des Minimums $m_n := \min\{X_1, \dots, X_n\}$.
Hinweis: Es ist einfacher, die Tailfunktion von m_n zu berechnen.

Aufgabe 1.1.4. Seien $X_1, \dots, X_n$ u.i.v. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion von m_n und M_n, d.h. berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[m_n \le x, M_n \le y]$.

Wir werden uns für die Eigenschaften von M_n für große Werte von n interessieren. Im folgenden Satz berechnen wir den Wert, gegen den die Zufallsvariable M_n für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit konvergiert.

Definition 1.1.5. Der **rechte Endpunkt** der Verteilungsfunktion F ist definiert durch

$$x^* = \sup\{t \in \mathbb{R} | F(t) < 1\} = \inf\{t \in \mathbb{R} | F(t) = 1\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Erreicht die Verteilungefunktion F nie den Wert 1, so ist $x^* = +\infty$.

Der rechte Endpunkt kann endlich oder $+\infty$ sein:

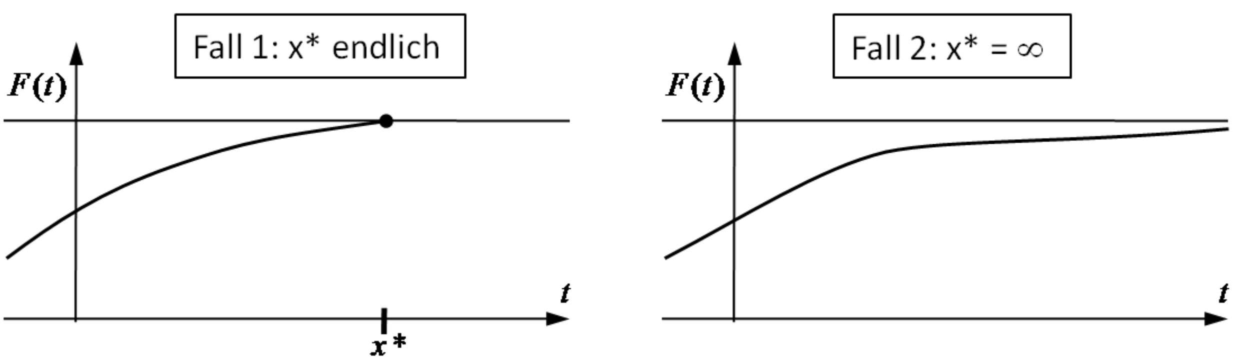

Abbildung 2. Veranschaulichung von x^*

Der rechte Endpunkt x^* ist das supremum aller Werte, die die Zufallsvariable X_1 annehmen kann, wobei aber Werte ignoriert werden, wenn ihre Wahrscheinlichkeit gleich 0 ist. Der Wert x^* heißt auch das **essentielle supremum** von X_1 und wird mit $\operatorname{esssup} X_1$ bezeichnet.

Satz 1.1.6. Für $n \to \infty$ konvergiert die Zufallsvariable M_n in Wahrscheinlichkeit gegen den Wert x^*.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

Fall 1. Sei zuerst x^* endlich. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $F(x^* - \varepsilon) < 1$, wobei die Ungleichung strikt ist. Aus Satz 1.1.2 folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[M_n \leq x^* - \varepsilon] = \lim_{n\to\infty} F^n(x^* - \varepsilon) = 0.$$

Außerdem gilt $\mathbb{P}[M_n \geq x^* + \varepsilon] = 0$. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|M_n - x^*| \geq \varepsilon] = \lim_{n\to\infty} (\mathbb{P}[M_n \leq x^* - \varepsilon] + \mathbb{P}[M_n \geq x^* + \varepsilon]). = 0$$

Somit gilt $M_n \stackrel{P}{\to} x^*$.

Fall 2. Sei nun $x^* = +\infty$. Wir zeigen, dass für jedes noch so großes $A \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[M_n < A] = 0.$$

Aus $x^* = \infty$ folgt, dass $F(A) < 1$, wobei die Ungleichung strikt ist. Mit Satz 1.1.2 folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[M_n < A] = \lim_{n\to\infty} F^n(A) = 0.$$

Somit gilt $M_n \stackrel{P}{\to} +\infty$. □

Aufgabe 1.1.7. Zeigen Sie, dass M_n sogar fast sicher gegen x^* konvergiert.

1.2. Definition der Extremwertverteilungen und deren Max–Anziehungsbereiche

Wir werden uns für die Gestalt der Verteilungsfunktion des Maximums $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ für große Werte von n interessieren. Zunächst einmal erinnern wir uns an zwei klassische Sätze über die Verteilung der Summe $X_1 + \ldots + X_n$.

Das starke **Gesetz der großen Zahlen** besagt, dass für u.i.v. Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ mit endlichem Erwartungswert μ

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \mu.$$

Der **zentrale Grenzwertsatz** besagt, dass für u.i.v. Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ mit endlichem Erwartungswert μ und endlicher Varianz $\sigma^2 > 0$ die Verteilungskonvergenz

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$$

gilt, wobei $N(0, 1)$ eine Standardnormalverteilung bezeichnet.

Wir wollen nun ein Analogon des zentralen Grenzwertsatzes für das Maximum M_n herleiten. Seien also $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Wir fragen uns, ob es Folgen von Konstanten $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ und eine Verteilungsfunktion G gibt, so dass für $n \to \infty$ die folgende Verteilungskonvergenz gilt:

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} G. \tag{1.2.1}$$

Es sei bemerkt, dass wir in (1.2.1) eine Normierung von M_n mit beliebigen Foglen a_n und b_n (und nicht nur mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung) zulassen, da in vielen interessanten Fällen der Erwartungswert und die Varianz gar nicht existieren.

Die Verteilungskonvergenz in (1.2.1) bedeutet, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq t\right] = G(t)$$

für alle Stetigkeitspunkte t von G. Eine äquivalente Formulierung ist diese:

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n t + b_n) = G(t) \tag{1.2.2}$$

für alle Stetigkeitspunkte t von G.

Wenn (1.2.1) bzw. (1.2.2) gilt, so sagen wir, dass G eine **Extremwertverteilung** ist und dass die Verteilungsfunktion F (bzw. die Zufallsvariablen X_i) im **Max-Anziehungsbereich** von G liegt.

Bemerkung 1.2.1. Es gibt einen Spezialfall von (1.2.1) und (1.2.2), der nicht interessant ist, und den wir deshalb ausschließen möchten. Eine Zufallsvariable Z, bzw. deren Verteilungsfunktion $G(t) = \mathbb{P}[Z \leq t]$, heißt **degeneriert**, wenn es einen Wert c mit $\mathbb{P}[Z = c] = 1$, bzw.

$$G(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ 1, & t \geq c \end{cases} \tag{1.2.3}$$

gibt. Für jede Verteilungsfunktion F kann man durch die "falsche" Wahl der Konstanten a_n, b_n erreichen, dass (1.2.1) bzw. (1.2.2) mit einer degenerierten Verteilungsfunktion G gilt. Man kann zum Beispiel $b_n = 0$ und a_n derart schnell steigend wählen, dass M_n/a_n gegen 0 in Verteilung konvergiert (Übungsaufgabe). Deshalb werden wir im Folgenden die degenerierten Verteilungsfunktionen G der Form (1.2.3) aus unseren Definitionen ausschließen.

Definition 1.2.2. Der **Max-Anziehungsbereich** einer nichtdegenerierten Verteilungsfunktion G besteht aus alllen Verteilungsfunktionen F, für die es zwei Folgen $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\lim_{n\to\infty} F^n(a_n t + b_n) = G(t) \tag{1.2.4}$$

für alle Stetigkeitspunkte t von G.

Den Max-Anziehungsbereich von G werden wir mit MDA(G) (**maximum domain of attraction**) bezeichnen. Wir werden im Folgenden sehen, dass es nur sehr wenige Verteilungsfunktionen G mit einem nicht-leeren Max-Anziehungsbereich gibt.

Definition 1.2.3. Eine nichtdegenerierte Verteilungsfunktion G heißt eine **Extremwertverteilung**, wenn der Max–Anziehungsbereich von G nicht leer ist.

Somit ist G eine Extremwertverteilung, wenn es eine Verteilungsfunktion F und zwei Folgen $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass (1.2.4) gilt.

Bemerkung 1.2.4. Später werden wir sehen, dass alle Extremwertverteilungsfunktionen stetig sind. Deshalb kann man Definition 1.2.2 vereinfachen, indem man die Einschränkung auf die Stetigkeitspunkte von t weglässt und stattdessen verlangt, dass (1.2.4) für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Bemerkung 1.2.5. Wir machen in diesem Skript keinen Unterschied zwischen einer Verteilung (die ein Wahrscheinlichkeismaß auf $\mathbb{R}$ ist) und der dazugehörigen Verteilungsfunktion. Zum Beispiel bezeichnen wir oft eine Verteilungsfunktion als "Extremwertverteilung".

1.3. Drei Beispiele von Extremwertverteilungen: Gumbel, Fréchet, Weibull

Mit der obigen Definition ist es nicht klar, ob Extremwertverteilungen überhaupt existieren. Im Folgenden werden wir drei Beispiele von Extremwertverteilungen (oder sogar Familien von Extremwertverteilungen) konstruieren. Später werden wir zeigen, dass es bis auf lineare Transformationen keine weiteren Extremwertverteilungen gibt.

Wir erinnern daran, dass wir mit $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F bezeichnen. Weiterhin, sei $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Gumbel–Verteilung $\Lambda(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}}$

Definition 1.3.1. Eine Zufallsvariable hat **Gumbel–Verteilung**, wenn Ihre Verteilungsfunktion die folgende Gestalt hat:

$$\Lambda(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

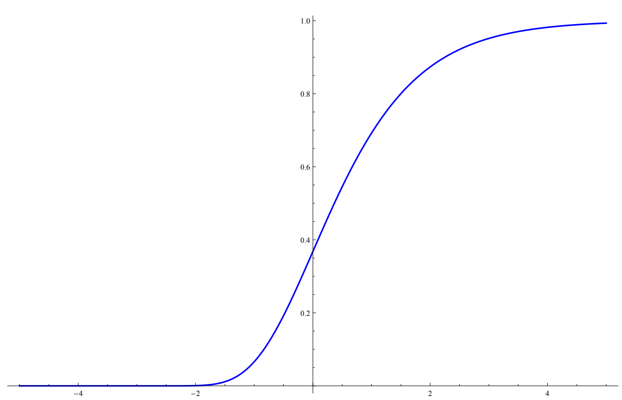

Abbildung 3. Verteilungsfunktion der Gumbel–Verteilung.

Der nächste Satz zeigt, dass die Gumbel–Verteilung eine Grenzwertverteilung für Maxima von u.i.v. exponentialverteilten Zufallsvariablen ist.

Satz 1.3.2. Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter 1, d.h.

$$F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}, \quad t \geq 0.$$

Dann konvergieren für $n \to \infty$ die Zufallsvariablen $M_n - \log n$ in Verteilung gegen Λ, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[M_n - \log n \leq t] = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

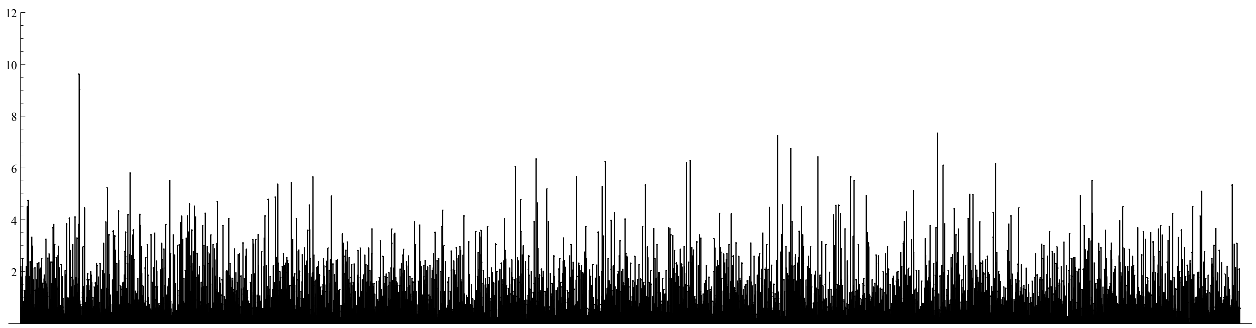

Abbildung 4. Eine mit Parameter 1 exponentialverteilte Stichprobe vom Umfang $n = 5000$.

Beweis. Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Mit Satz 1.1.2 gilt

$$\mathbb{P}[M_n - \log n \leq t] = \mathbb{P}[M_n \leq t + \log n] = F^n(t + \log n).$$

Die Zufallsvariablen X_i sind exponentialverteilt und $t + \log n > 0$ für n hinreichend groß. Es folgt, dass bei einem hinreichend großen n,

$$\mathbb{P}[M_n - \log n \leq t] = (1 - \mathrm{e}^{-(t+\log n)})^n = \left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}}.$$

Somit gilt $M_n - \log n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \Lambda$. $\square$

Bemerkung 1.3.3. Gemäß Satz 1.3.2 liegt die Exponentialverteilung im Max–Anziehungsbereich der Gumbel–Verteilung:

$$\mathrm{Exp}(1) \in \mathrm{MDA}(\Lambda).$$

Die Gumbel–Verteilung ist somit eine Extremwertverteilung. Man kann Satz 1.3.2 wie folgt interpretieren: Für großes n nimmt das Maximum M_n Werte an, die sich von dem Wert $\log n$ um eine approximativ Gumbel–verteilte "Fluktuation" unterscheiden.

Fréchet–Verteilung $\Phi_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-t^{-\alpha}}, t > 0$

Definition 1.3.4. Eine Zufallsvariable heißt Fréchet–verteilt mit Parameter $\alpha > 0$, wenn ihre Verteilungsfunktion die folgende Gestalt hat:

$$\Phi_\alpha(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t^{-\alpha}}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

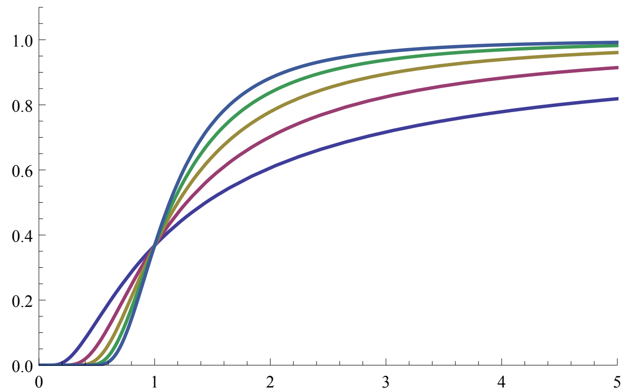

ABBILDUNG 5. Verteilungsfunktionen der Fréchet–Verteilungen mit $\alpha = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$.

Der nächste Satz zeigt, dass Fréchet–Verteilung eine Extremwertverteilung ist.

Satz 1.3.5. Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ seien Pareto–verteilt mit Parameter $\alpha > 0$, d.h.

$$F(t) = \begin{cases} 1 - t^{-\alpha}, & t \ge 1, \\ 0, & t \le 1. \end{cases}$$

Dann konvergieren für $n \to \infty$ die Zufallsvariablen $n^{-\frac{1}{\alpha}} M_n$ in Verteilung gegen Φ_α, d.h. es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{M_n}{n^{1/\alpha}} \le t\right] = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t^{-\alpha}}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

BEWEIS. Sei $t > 0$ beliebig. Mit Satz 1.1.2 erhalten wir, dass

$$\mathbb{P}\left[\frac{M_n}{n^{1/\alpha}} \le t\right] = \mathbb{P}[M_n \le tn^{1/\alpha}] = F^n(tn^{1/\alpha}).$$

Da die Zufallsvariablen X_i Pareto–verteilt sind und $tn^{1/\alpha} > 1$ für hinreichend großes n, ergibt sich, dass

$$\mathbb{P}\left[\frac{M_n}{n^{1/\alpha}} \le t\right] = \left(1 - \frac{1}{(tn^{1/\alpha})^\alpha}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{t^\alpha n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} \mathrm{e}^{-t^{-\alpha}}.$$

Für $t \le 0$ gilt $\mathbb{P}[n^{-\frac{1}{\alpha}} M_n \le t] = 0$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 1.3.6. Man kann Satz 1.3.5 wie folgt interpretieren: Für großes n nimmt das Maximum M_n sehr große Werte auf der Skala $n^{1/\alpha}$ an. Reskaliert man M_n mit dem Faktor $n^{-1/\alpha}$, so erhält man approximativ Fréchet–verteilte Werte.

Weibull–Verteilung $\Psi_\alpha(t) = \mathrm{e}^{-(-t)^\alpha}, t < 0$

Definition 1.3.7. Eine Zufallsvariable heißt **Weibull–verteilt** mit Parameter $\alpha > 0$, wenn ihre Verteilungsfunktion die folgende Form hat:

$$\Psi_\alpha(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(-t)^\alpha}, & t \leq 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

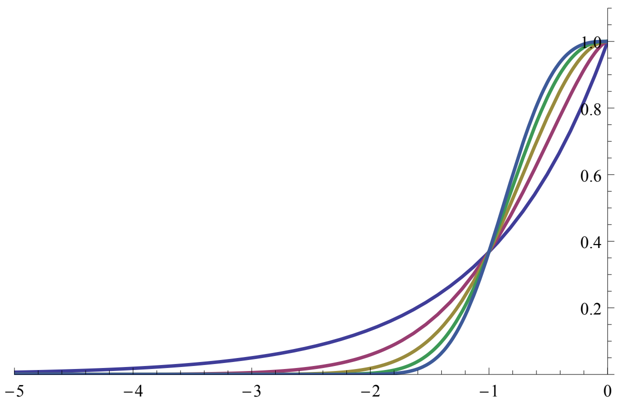

Abbildung 6. Verteilungsfunktionen der Weibull–Verteilungen mit $\alpha = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$.

Der nächste Satz zeigt, dass die Weibull–Verteilung eine Extremwertverteilung ist.

Satz 1.3.8. Seien die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ unabhängig mit der Verteilungsfunktion

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -1, \\ 1 - (-t)^\alpha, & t \in [-1, 0], \\ 1, & t \geq 0, \end{cases}$$

wobei $\alpha > 0$ ein Parameter ist. Dann konvergieren für $n \to \infty$ die Zufallsvariablen $n^{1/\alpha} M_n$ in Verteilung gegen Ψ_α, d.h. es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[n^{1/\alpha} M_n \leq t] = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(-t)^\alpha}, & t \leq 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Beweis. Sei $t \leq 0$ beliebig. Mit Satz 1.1.2 erhalten wir, dass

$$\mathbb{P}[n^{1/\alpha} M_n \leq t] = \mathbb{P}[M_n \leq t n^{-1/\alpha}] = F^n(t n^{-1/\alpha}).$$

Für n hinreichend groß ist $tn^{-1/\alpha} \in [-1, 0]$. Aus der Formel für die Verteilungsfunktion F folgt, dass

$$\mathbb{P}[n^{1/\alpha} M_n \le t] = (1 - (-tn^{-1/\alpha})^\alpha)^n = \left(1 - \frac{(-t)^\alpha}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} \mathrm{e}^{-(-t)^\alpha}.$$

Für $t \ge 0$ gilt $\mathbb{P}[n^{1/\alpha} M_n \le t] = 1$, denn $M_n \le 0$ f.s. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung 1.3.9. Man kann Satz 1.3.8 wie folgt interpretieren: Für großes n nähert sich das Maximum M_n dem Wert 0 von unten an. Dabei nimmt M_n sehr kleine negative Werte auf der Skala $n^{-1/\alpha}$ an. Reskaliert man M_n mit dem Faktor $n^{1/\alpha}$, so erhält man approximativ Weibull–verteilte Fluktuationen.

Bemerkung 1.3.10. Eine Fréchet–verteilte Zufallsvariable nimmt nur positive Werte an. Eine Weibull–verteilte Zufallsvariable nimmt nur negative Werte an. Eine Gumbel–verteilte Zufallsvariable kann sowohl positive als auch negative Werte annehmen.

1.4. Satz von Fisher–Tippett

Wir haben folgende Extremwertverteilungen konstruiert: Die Gumbel–Verteilung Λ, die Fréchet–Verteilung Φ_α (wobei $\alpha > 0$) und die Weibull–Verteilung Ψ_α (wobei $\alpha > 0$). Weitere Beispiele von Extremwertverteilungen können konstruiert werden, indem wir auf die oben genannten Verteilungen lineare Transformationen anwenden.

Definition 1.4.1. Zwei Zufallsvariablen Z_1 und Z_2 sind **vom gleichen Typ**, wenn es $c > 0$ und $d \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$Z_1 \stackrel{d}{=} cZ_2 + d.$$

Notation: $Z_1 \bowtie Z_2$.

Bezeichnen wir mit F_1 und F_2 die Verteilungsfunktionen von Z_1 und Z_2, so kann man die obige Bedingung wie folgt formulieren:

$$F_1(t) = \mathbb{P}[Z_1 \le t] = \mathbb{P}[cZ_2 + d \le t] = \mathbb{P}\left[Z_2 \le \frac{t-d}{c}\right] = F_2\left(\frac{t-d}{c}\right).$$

Definition 1.4.2. Zwei Verteilungsfunktionen F_1 und F_2 sind **vom gleichen Typ**, wenn es $c > 0$ und $d \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$

$$F_1(t) = F_2\left(\frac{t-d}{c}\right).$$

Notation: $F_1 \bowtie F_2$.

Beispiel 1.4.3. Die Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1]$ ist vom gleichen Typ wie die Gleichverteilung auf einem beliebigen Intervall $[a, b]$. Die Normalverteilung mit beliebigen Parametern ist vom gleichen Typ wie die Standardnormalverteilung.

Aufgabe 1.4.4. Zeigen Sie, dass $\bowtie$ eine Äquivalenzrelation ist, d. h.

(1) $F \bowtie F$.
(2) $F \bowtie G \;\Rightarrow\; G \bowtie F$.
(3) $F \bowtie G, G \bowtie H \;\Rightarrow\; F \bowtie H$.

Proposition 1.4.5. Hat eine Zufallsvariable Z (mit Verteilungsfunktion $G(t)$) eine Extremwertverteilung, so hat für beliebige $c > 0$ und $d \in \mathbb{R}$ auch die Zufallsvariable $cZ + d$ (mit Verteilungsfunktion $G\left(\frac{t-d}{c}\right)$) eine Extremwertverteilung.

Beweis. Die Voraussetzung, dass die Zufallsvariable Z einer Extremwertverteilung gehorcht, bedeutet, dass es unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ und Folgen $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\frac{\max\{X_1, \ldots, X_n\} - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z.$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{\max\{cX_1, \ldots, cX_n\} - (cb_n - da_n)}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} cZ + d.$$

Somit hat die Zufallsvariable $cZ + d$ ebenfalls eine Extremwertverteilung. $\square$

Aufgabe 1.4.6. Zeigen Sie, dass die Max-Anziehungsbereiche der Verteilungsfunktionen $G(t)$ und $G\left(\frac{t-d}{c}\right)$ gleich sind.

Aus Proposition 1.4.5 folgt, dass für beliebige $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$, die folgenden Verteilungen Extremwertverteilungen sind:

Verteilungen vom Gumbel–Typ:

$$\Lambda\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \exp\left\{-\mathrm{e}^{-\frac{t-\mu}{\sigma}}\right\}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.4.1}$$

Verteilungen vom Fréchet–Typ (mit Parameter $\alpha > 0$):

$$\Phi_\alpha\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^{-\alpha}\right\}, & \text{falls } t > \mu, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.4.2}$$

Verteilungen vom Weibull–Typ (mit Parameter $\alpha > 0$):

$$\Psi_\alpha\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(-\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^{\alpha}\right\}, & \text{falls } t < \mu, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.4.3}$$

Später werden wir beweisen, dass es keine weiteren Extremwertverteilungen gibt:

Satz 1.4.7 (Fisher–Tippett, 1928, Gnedenko (1943))**.** Jede Extremwertverteilung gehört zu einer der drei Familien (1.4.1), (1.4.2) oder (1.4.3).

1.5. Jenkinson–von Mises–Darstellung

Es gibt eine Darstellung (*Jenkinson–von Mises–Darstellung*), die alle drei Familien (1.4.1), (1.4.2), (1.4.3) als Spezialfälle beinhaltet. Betrachte nämlich die folgende Familie von Verteilungsfunktionen (parametrisiert durch $\gamma \in \mathbb{R}$)

$$G_\gamma(t) = \begin{cases} \exp\left\{-(1+\gamma t)^{-1/\gamma}\right\}, & \text{falls } 1+\gamma t > 0, \\ 0, & \text{falls } \gamma > 0 \text{ und } t \le -1/\gamma, \\ 1, & \text{falls } \gamma < 0 \text{ und } t \ge -1/\gamma. \end{cases}$$

Folgendes lässt sich nun leicht überprüfen:

(1) Für $\gamma > 0$ ist G_γ vom gleichen Typ wie die Fréchet–Verteilung $\Phi_{1/\gamma}(t) = \mathrm{e}^{-t^{-1/\gamma}}$, $t > 0$.

(2) Für $\gamma < 0$ ist G_γ vom gleichen Typ wie die Weibull–Verteilung $\Psi_{-1/\gamma}(t) = \mathrm{e}^{-(-t)^{-1/\gamma}}$, $t < 0$.

(3) Für $\gamma = 0$ ist $(1+\gamma t)^{-1/\gamma}$ nicht wohldefiniert. Wir interpretieren diesen Term dann als Grenzwert für $\gamma \to 0$:

$$\lim_{\gamma \to 0} (1+\gamma t)^{-1/\gamma} = \mathrm{e}^{-t}.$$

Somit ist $G_0(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-t}}$, $t \in \mathbb{R}$, die Gumbel–Verteilung.

Der Satz von Fisher–Tippett lässt sich also auch wie folgt formulieren.

Satz 1.5.1 (Fisher–Tippett, 1928)**.** Jede Extremwertverteilung hat die Form $G_\gamma(ct+d)$ mit passenden Parametern $\gamma \in \mathbb{R}$, $c > 0$, $d \in \mathbb{R}$.

Eine in der Form $G_\gamma(ct+d)$ dargestellte Extremwertverteilung wird in der Statistik auch *GEV–Verteilung* genannt (*General Extreme–Value Distribution*).