Themen des Bachelorseminars zur Finanz- und Versicherungsmathematik

1. Das mehrdimensionale Cox-Ross-Rubinstein Modell

Ein CRR Modell für d Aktien kann dadurch spezifiziert werden, dass der Preisprozeß S_i der i -ten Aktie durch einen geometrischen Random Walk der Form

$$S_i(n) = S_i(0) \prod_{k=1}^n Y_i(k), n = 0, \dots, N$$

beschrieben wird. Die *iid*-Zufallsvariablen $Y_i(1), \dots, Y_i(N)$ können dabei nur die Werte $0 < d_i < u_i$ annehmen.

Zusätzlich hat man noch als Numeraire Asset ein Geldmarktkonto β mit einer Entwicklung der Form

$$\beta(n) = (1 + \rho)^n$$

mit einer periodischen Zinsrate ρ .

Ihre Aufgabe besteht darin, dieses Modell im Sinne der Vorlesung zu untersuchen. Am besten beginnend mit dem Fall $d = 2$ sollen notwendige und hinreichende Bedingungen für die Arbitragefreiheit formuliert und bewiesen werden. Anschließend ist im Falle der Arbitragefreiheit die Menge der äquivalenten Martingalmaße zu bestimmen. Es wird sich herausstellen, dass ein unvollständiges Modell vorliegt, so dass für nicht hedgebare Claims ein Preisintervall von arbitragefreien Anfangspreisen existiert. Man gebe zunächst Beispiele für hedgebare Claims an.

Anschließend sollte man für Claims der Form $C = g(S_1(N), S_2(N))$ einen Algorithmus entwickeln, der den upper und lower hedging Preis berechnet.

Anzuwenden ist dies auf den Fall der Exchange-Option. Als Ausblick könnte man sich noch überlegen, wie man ein zweidimensionales Black-Scholes Modell durch ein diskretes CRR Modell approximieren kann. Die diskreten upper- und lower hedging Preise stellen dann eine Approximation für den Black-Scholes Preis dar.

2. Portfoliooptimierung bei Mortalitäten

Wir betrachten ein Versicherungsunternehmen mit n Kunden gleichen Eintrittsalters, die heute insgesamt ein Anfangskapital x einmalig einzahlen. Nach T Jahren erhält jeder dann noch lebende Kunde eine garantierte Endauszahlung von K Euro. Die Aufgabe des Versicherungsunternehmens besteht darin, das Anfangskapital x so am Finanzmarkt anzulegen, dass der Nutzen des erzielten Endvermögens maximal wird. Um dieses Problem etwas genauer zu fassen, betrachten wir ein angepaßtes CRR Finanzmarktmodell mit einem risky asset S und einem Geldmarktkonto β . Das Anfangskapital x soll möglichst optimal durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie H angelegt werden. Optimal bedeutet hier, dass

$$\mathbb{E}[U(V_T(H) - (n - N_T)K)]$$

maximiert wird unter allen previsible Prozessen H . Zu bemerken ist noch, dass U eine Nutzenfunktion bezeichnet und N die Anzahl der Sterbefälle zählt. Die

Zufallsvariable $n - N_T$ ist also die zufällige Anzahl an Überlebenden zum Zeitpunkt T , an die die Garantiesumme K ausgezahlt werden muss.

Um sich diesem durchaus nicht einfachen Problem zu nähern, kann man zunächst die Mortalitäten ausblenden. Dann ist dies ein klassisches Optimierungsproblem und kann zum Beispiel mit der Martingalmethode gelöst werden. Einzelheiten hierzu sind zum Beispiel zu finden unter

<http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/paulsen/Abschlussarbeiten/Bachelorarbeiten/Hasow.pdf>

Für die Einbeziehung von Mortalitäten ist es sinnvoll dieses Problem als diskretes stochastisches Kontrollproblem anzusehen. Dann kann eine optimale Strategie mittels der dynamischen Programmierung gewonnen werden. Zu lösen ist hierzu rekursiv die sogenannte Hamilton Jacobi Bellman Gleichung. Dieser Ansatz kann z.B. nachgelesen werden in der Monographie Markov Decision Processes with Applications, von Nicole Bäuerle und Ulrich Rieder.

In der Bachelorarbeit sind folgende Aufgaben durchzuführen:

- (a) Genaue Problembeschreibung
- (b) Formulierung der Portfoliooptimierung als Markovsches Entscheidungsproblem
- (c) Aufstellen der HJB Gleichung nebst numerischem Lösungsverfahren
- (d) Präsentation der Ergebnisse

3. Die Put Call Symmetrie von Carr

In einem Black-Scholes Modell mit Zinsrate $r = 0$ und Volatilität $\sigma > 0$ bezeichnen $c(x, T, K)$ und $p(x, T, K)$ den Anfangspreis eines Calls bzw. eines Puts mit Laufzeit T , Anfangskurs x und Strike K . Ihre Aufgabe ist der Nachweis der nicht offensichtlichen Identität

$$c(x, T, K) = p(K, T, x),$$

welche als Symmetrie von Carr bezeichnet wird.

Einerseits können Sie dies natürlich mehr oder weniger geschickt direkt aus der Black-Scholes Formel verifizieren, andererseits empfiehlt es sich die Formel durch ein abstraktes Argument, einer Anwendung der Numeraire Technik, einzusehen.

Hierzu führt man neben dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ das sogenannte Aktienmartingalmaß $\bar{\mathbb{P}}$ ein. Dies ist dadurch definiert, dass $\beta(t)/S(t)$ ein $\bar{\mathbb{P}}$ Martingal ist.

Die Aufgaben sind also die folgenden:

- (a) Konstruktion des Aktienmartingalmaßes.
- (b) Wie kann man das Aktienmartingalmaß nutzen, um arbitragefreie Anfangspreise zu berechnen.
- (c) Herleitung der Symmetrie von Carr.
- (d) Wie muss die Identität umformuliert werden, wenn eine Zinsrate $r \neq 0$ im Markt ist.

- (e) Kann man auch eine analoge Symmetrie für das CRR Modell formulieren und beweisen?
- (f) Müßte nicht auch eine ähnliche Symmetrie für Exchange Optionen im Black-Scholes Modell gelten?

4. Quantile Hedging in diskreten Märkten

Im Vortrag bzw. der Arbeit soll das Konzept des Quantile Hedging vorgestellt werden. Als Vorlage hierzu kann das Kapitel 8 aus dem Buch von Föllmer, Schied dienen. Für einen vollständigen Markt kann das Problem relativ einfach auf ein Testproblem von sogenannten einfachen Hypothesen zurückgeführt werden. Bei einem unvollständigen Markt sind zusammengesetzte Hypothesen zu betrachten. Im weiteren Verlauf könnte man sich überlegen, wie das Problem im CRR Modell bzw. Trinomialmodell implementiert werden könnte.

5. Portfoliooptimierung in Theorie und Praxis

Wir betrachten eine Zeitreihe von historischen Kursen einer Auswahl von Finanzgütern, in die wir investieren wollen mit dem Ziel, empirisch den Erfolg von Anlagestrategien zu ermitteln. Diese ergeben sich durch die Umsetzung verschiedener Konzepte der Portfoliooptimierung.

In dem Vortrag bzw. der Arbeit sollten folgende Punkte behandelt werden.

- (a) Vorstellung der Optimierung nach Markowitz. Dies ist sehr schön in <http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/paulsen/Abschlussarbeiten/Bachelorarbeiten/Kraska.pdf> ausgeführt.
- (b) Vorstellung des Konzeptes der Nutzenbasierten Optimierung des Endvermögens (Mertonproblem) Dies ist z.B. in <http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/paulsen/Abschlussarbeiten/Bachelorarbeiten/Hasow.pdf> zu finden.
- (c) Implementierung der obigen Methoden und Anwendung auf die historische Zeitreihe um eine Performancemessung durchzuführen.

6. Das Ho Lee Modell

Das Ho Lee Modell beschreibt in diskreter Zeit die Entwicklung der sogenannten Zerobondpreiskurve und ist damit ein Zinsstrukturmodell, das einen Rentenmarkt modellieren kann. Im Vortrag bzw. der Arbeit sollten folgende Punkte behandelt werden

- (a) Darstellung und Diskussion des Modells: Hier kann man sehr schön die Präsentation der Diplomarbeit von Britta Speckmann benutzen, um ein Verständnis für das Modell zu entwickeln. Die Darstellung sollte einen anderen Weg gehen. Ziel ist es herauszuarbeiten, dass das Ho Lee Modell ein short rate Modell ist, dass von einem Markov-Prozeß getrieben wird. siehe

<http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/paulsen/Abschlussarbeiten/Diplomarbeiten/Speckmann.pdf>

- (b) Implementierung des Modells: Zum einen soll man visualisieren, in welcher Art und Weise eine Bondpreiskurve sich zufällig in dem Modell verändern kann. Zum anderen sollte man Preise für geeignete Zinsderivate in dem Modell numerisch berechnen.
- (c) Modifikation des Modells: Hier kann man sich überlegen, wie man den Ansatz verallgemeinern kann, um eine größere Variabilität zu erzielen.

7. Simulation eines Portfolios von Versicherungsverträgen

Wir betrachten ein Versicherungsunternehmen, das eine gewisse Anzahl von klar definierten Personenversicherungen anbietet. Für jede Versicherung hat das Unternehmen eine gewisse Anzahl von Verträgen, die man jeweils zu einem Subportfolio zusammenfassen kann. Die Gesamtheit der Subportfolios bilden schließlich das Gesamtportfolio des Unternehmens. Ausgehend von einer Anfangseinlage $x_0 > 0$ soll die zukünftige Entwicklung der Einnahmen und Ausgaben der Subportfolios bzw. des Gesamtportfolios simuliert werden. Ziel ist dabei zu untersuchen, ob die Anfangseinlage groß genug ist, eine Insolvenz des Unternehmens zu verhindern. Die Aufgabe kann man in folgende Schritte unterteilen.

- (a) Aufstellen des Portfolios: Hier macht es Sinn, die Standardtypen von Versicherungen zu betrachten, etwa Todesfall, gemischte, aufgeschobene Rentenversicherung usw.
- (b) Kurz Skizzieren, wie das Unternehmen die Prämien für diese Versicherungen ausrechnet. Hierzu sind die geeigneten Sterbetafeln zu benutzen. Um es realitätsnäher zu gestalten, ist es sinnvoll neben der Nettoprämie auch die Bruttoprämie unter Einbeziehung der Kosten zu berücksichtigen.
- (c) Durchführung der Simulation
- (d) Prüfen, inwieweit Risikofaktoren, wie das Langlebigkeitsrisiko oder Veränderungen am Kapitalmarkt das Ergebnis beeinflussen.

Als Literatur eignet sich hier das Buch Praktische Lebensversicherungsmathematik von Karl Michael Ortmann

8. Das diskrete Vasicek Modell zur Beschreibung von Rentenmärkten

Die Aufgabe besteht darin, ein spezielles diskretes Bondmarktmodell aufzustellen. Hierzu teilen wir den Zeitraum in N Perioden ein. Für jedes $1 \leq n \leq N$ kann dann eine Nullkuponanleihe mit Fälligkeit n als Claim angesehen werden, der zum Zeitpunkt n eine Auszahlung 1 liefert. Gibt man die zufällige Entwicklung der periodischen Zinssätze $(\rho(n))_{n=1 \dots N}$ bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ vor, so kann man ein arbitragefreies Bondmarktmodell erhalten durch

$$B(k, n) = \mathbb{E}\left(\frac{\beta(k)}{\beta(n)} \mid \mathfrak{F}_k\right)$$

für alle $k \leq n$. Hierbei bezeichnet $\beta(n) = \prod_{k=1}^n (1 + \rho(k))$ die Entwicklung eines Geldmarktkontos.

Die periodischen Zinssätze $\rho(n)$ entsprechen den sogenannten short rates im Modell, weswegen so ein Ansatz ein short rate Modellansatz genannt wird.

Bei einem Vasicek Modell wird eine Entwicklung für ρ der Form

$$\rho(n+1) = \rho(n)(1 - \theta) + \theta\mu + \sigma X(n)$$

postuliert, wobei $\rho(1) > -1, \theta, \mu, \sigma > 0$ Parameter des Modells sind und $X_1, \dots, X_{N-1}$ iid Zufallsvariablen sind, die jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ die Werte $+1$ oder -1 annehmen können.

Folgende Schritte könnten durchgeführt werden:

- (a) Präzisierung der eingangs beschriebenen Überlegungen. Ausgehend von einem arbitragefreien Bondmarkt mit äquivalentem Martingalmaß soll aufgezeigt werden, wie man prinzipiell den Preis einer Nullkuponanleihe berechnen kann.
- (b) Aufstellen und Beschreiben des Vasicek-Modells
- (c) Zeigen, dass in einem Vasicek-Modell der Preis $B(k, n)$ eine Funktion der short rate $\rho(k+1)$ der $k+1$ -ten Periode ist.
- (d) Implementierung des Modells: Numerisch sollte die Anfangskurve der Bondpreise ausgerechnet werden. Weiter sollten Preise für geeignete Zinsderivate bestimmt werden.
- (e) Wie kann man eine Approximation des zeitstetigen Vasicek-Modells durch eine diskretes durchführen?

9. Die Bewertung von amerikanischen Optionen mit unendlicher Laufzeit

Wir betrachten ein Black-Scholes Modell und bezeichnen mit $(S_t^{(x)})_{t \geq 0}$ den Preisprozess der Aktie zum Startkurs x . Der Preis einer amerikanischen Putoption mit Basis K ist gegeben durch

$$\sup_{\tau} \mathbb{E} e^{-r\tau} (K - S_{\tau}^{(x)})^+ 1_{\{\tau < \infty\}}.$$

Die Stopzeit τ kann als zufälliger Ausübungszeitpunkt der Option angesehen werden, die vom Halter der Option gewählt werden kann, weshalb dies möglichst optimal geschieht.

In dem Vortrag bzw. der Arbeit soll die Beibel Lerche Methode des optimalen Stoppens vorgestellt werden mit dem Ziel zu zeigen, wie diese zum Bestimmen der optimalen Strategie genutzt werden kann.

Weiter sollte man sich überlegen, wie eine Anwendung im diskreten CRR Modell durchgeführt werden kann.

Schließlich kann man sich noch überlegen, wie diese Methode bei Exchangeoptionen angewendet werden kann.