

Definitionen aus der Graphentheorie

Ein (ungerichteter, einfacher) *Graph* $G = (V, E)$ besteht aus:

- einer endlichen oder abzählbar unendlichen *Knotenmenge* V ,
- und einer *Kantenmenge* E , die eine Teilmenge der zwei-elementigen Teilmengen von V ist.

Eine Kante $e \in E$ ist also ein ungeordnetes Paar $\{u, v\}$, $u \neq v$, welches wir als $e = \langle u, v \rangle$ schreiben.

Mit dieser Definition sind Graphen grundsätzlich

- *einfach* (d.h. es gibt keine Mehrfachkanten),
- und es gibt keine *Schleifen* (also Kanten die im selben Knoten starten und enden).

Zwei Knoten $u, v \in V$ werden durch eine Kante verbunden, wenn $\langle u, v \rangle \in E$, wir schreiben $u \sim v$ und sagen, dass u und v benachbart sind. Die Anzahl der benachbarten Knoten von u ist der *Grad* von u und wird als $\deg(u)$ geschrieben.

Für einen *gerichteten Graphen* ist die Kantenmenge eine Teilmenge von $E \times E$ und wir schreiben $[u, v]$ für das geordnete Paar (u, v) (der Kante von u nach v).

Ein *Pfad* in G ist definiert als eine alternierende Folge $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{n-1}, v_n$ von unterschiedlichen Knoten v_i und Kanten $e_i = \langle v_i, v_{i+1} \rangle$. Ein solcher Pfad hat Länge n und verbindet v_0 mit v_n . Als Kurzschreibweise werden häufig auch nur die Folge der Knoten angegeben.

Ein *Kreis* oder *Zyklus* (engl. cycle, circuit) in G ist eine alternierende Folge $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{n-1}, v_n, e_n, v_0$ von Knoten und Kanten so dass $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{n-1}, v_n$ ein Pfad ist und $e_n = \langle v_n, v_0 \rangle$. Ein solcher Kreis hat Länge $n + 1$.

- Der (graph-theoretische) *Abstand* $\delta(u, v)$ von u nach v ist die Anzahl der Kanten im kürzesten Pfad der u und v verbindet.
- Wir schreiben $u \rightsquigarrow v$ wenn es einen Pfad von u nach v gibt. Die Relation \rightsquigarrow ist eine Äquivalenzrelation, die zugehörigen Äquivalenzklassen nennt man *Komponenten* oder *Zusammenhangskomponenten* (auch *Cluster*) von G .
- Eine Graph ist *zusammenhängend*, wenn er eine einzige Zusammenhangskomponente hat.
- Eine Graph ist ein *Wald* (oder azyklischer Graph, engl. forest) wenn er keine Kreise enthält.
- Ein Graph ist ein *Baum* wenn er keine Kreise enthält und zusammenhängend ist.

Ein *Teilgraph* von $G = (V, E)$ ist ein Graph $H = (W, F)$ wobei $W \subseteq V$ und $F \subseteq E$.

- Der Teilgraph H ist ein *Spannbaum* oder *aufspannender Baum* (engl. spanning tree) wenn $V = W$ und H ein Baum ist.

Für eine Teilmenge $U \subseteq V$ definieren wir den *Rand* als

$$\partial U = \{u \in U : u \sim v \text{ für ein } v \in V \setminus U\}.$$