

## Definitionen aus der Graphentheorie

Ein (ungerichteter, einfacher) *Graph*  $G = (V, E)$  besteht aus:

- einer endlichen oder abzählbar unendlichen *Knotenmenge*  $V$ ,
- und einer *Kantenmenge*  $E$ , die eine Teilmenge der zwei-elementigen Teilmengen von  $V$  ist.

Eine Kante  $e \in E$  ist also ein ungeordnetes Paar  $\{u, v\}$ ,  $u \neq v$ , welches wir als  $e = \langle u, v \rangle$  schreiben.

Mit dieser Definition sind Graphen grundsätzlich

- *einfach* (d.h. es gibt keine Mehrfachkanten),
- und es gibt keine *Schleifen* (also Kanten die im selben Knoten starten und enden).

Zwei Knoten  $u, v \in V$  werden durch eine Kante verbunden, wenn  $\langle u, v \rangle \in E$ , wir schreiben  $u \sim v$  und sagen, dass  $u$  und  $v$  benachbart sind. Die Anzahl der benachbarten Knoten von  $u$  ist der *Grad* von  $u$  und wird als  $\deg(u)$  geschrieben.

Für einen *gerichteten Graphen* ist die Kantenmenge eine Teilmenge von  $E \times E$  und wir schreiben  $[u, v]$  für das geordnete Paar  $(u, v)$  (der Kante von  $u$  nach  $v$ ).

Ein *Pfad* in  $G$  ist definiert als eine alternierende Folge  $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{n-1}, v_n$  von unterschiedlichen Knoten  $v_i$  und Kanten  $e_i = \langle v_i, v_{i+1} \rangle$ . Ein solcher Pfad hat Länge  $n$  und verbindet  $v_0$  mit  $v_n$ . Als Kurzschreibweise werden häufig auch nur die Folge der Knoten angegeben.

Ein *Kreis* oder *Zyklus* (engl. cycle, circuit) in  $G$  ist eine alternierende Folge  $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{n-1}, v_n, e_n, v_0$  von Knoten und Kanten so dass  $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{n-1}, v_n$  ein Pfad ist und  $e_n = \langle v_n, v_0 \rangle$ . Ein solcher Kreis hat Länge  $n + 1$ .

- Der (graph-theoretische) *Abstand*  $\delta(u, v)$  von  $u$  nach  $v$  ist die Anzahl der Kanten im kürzesten Pfad der  $u$  und  $v$  verbindet.
- Wir schreiben  $u \leftrightarrow v$  wenn es einen Pfad von  $u$  nach  $v$  gibt. Die Relation  $\leftrightarrow$  ist eine Äquivalenzrelation, die zugehörigen Äquivalenzklassen nennt man *Komponenten* oder *Zusammenhangskomponenten* (auch *Cluster*) von  $G$ .
- Eine Graph ist *zusammenhängend*, wenn er eine einzige Zusammenhangskomponente hat.
- Eine Graph ist ein *Wald* (oder azyklischer Graph, engl. forest) wenn er keine Kreise enthält.
- Ein Graph ist ein *Baum* wenn er keine Kreise enthält und zusammenhängend ist.

Ein *Teilgraph* von  $G = (V, E)$  ist ein Graph  $H = (W, F)$  wobei  $W \subseteq V$  und  $F \subseteq E$ .

- Der Teilgraph  $H$  ist ein *Spannbaum* oder *aufspannender Baum* (engl. spanning tree) wenn  $V = W$  und  $H$  ein Baum ist.

Für eine Teilmenge  $U \subseteq V$  definieren wir den *Rand* als

$$\partial U = \{u \in U : u \sim v \text{ für ein } v \in V \setminus U\}.$$