Übungen zur Vorlesung Stochastische Modelle[1]

Abgabetermin: Freitag, 20.06.2014, 12:15 Uhr in Briefkasten 132.
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (Gibbs Maße) (5 Punkte)
Es sei $G = (V, E)$ endlicher Graph und π sei W-Maß auf $\Sigma = \{0, 1\}^V$. Wir können jedes $\sigma \in \Sigma$ identifizieren mit der Menge $\eta(\sigma) := \{v \in V : \sigma_v = 1\}$. Zeigen Sie: Es existiert eine Funktion $\phi : \mathcal{P}(V) \to \mathbb{R}$ mit $\phi_C = 0\ \forall C \notin \mathscr{K}$ mit

$$\pi(B) = \exp\left(\sum_{K \subset B} \phi_K\right),\ B \subset V$$

genau dann, wenn Funktionen $(f_K : \{0, 1\}^K \to \mathbb{R}, K \in \mathscr{K})$ existieren mit

$$\pi(\sigma) = \exp\left(\sum_{K \in \mathscr{K}} f_K(\sigma_K)\right)$$

Dabei bezeichnet $\mathscr{K}$ -wie in der Übung- die Menge der vollständigen Teilgraphen eines Abhängigkeitsgraphen und es ist $\sigma_K := (\sigma_x)_{x \in K}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Berechnen Sie die Ratenfunktion $I(a) := \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(at - \log \mathbb{E}[e^{tX}]\right)$, $a \geq 0$, aus der Cramér-Ungleichung im Falle dass

(a) $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, $\lambda > 0$

(b) $X \sim \mathrm{Ber}(p)$, $p \in (0, 1)$

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Sei $S_n = X_1 + ... + X_n, n \in \mathbb{N}_0$ eine Irrfahrt mit iid $\mathbb{N}_0$-wertigen Zuwächsen $(X_i, i \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie mittels des Treffzeitentheorems, dass für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_0(S_m < m\ \forall 1 \leq m \leq n \mid S_n = n - k) = \frac{k}{n}$$

gilt. Betrachten Sie dazu die Irrfahrt $S'_m := k + (S_n - n) - (S_{n-m} - n + m)$.

[1]Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/SS14/StochModelle/`

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben sei ein Galton-Watson Prozess $\mathcal{T}$ mit Nachkommenverteilung $\mathrm{Poi}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Man zeige

$$\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi n}}\,\mathrm{e}^{-I_\lambda n}(1 + o(1)) \quad \text{für} \ \ n \to \infty,$$

wobei $I_\lambda = \lambda - 1 - \log(\lambda)$.

<u>Hinweis:</u> Stellen Sie die Wahrscheinlichkeit explizit dar und nutzen Sie die Stirling Formel.