Übungen zur Vorlesung Stochastische Modelle[1]

Abgabetermin: Freitag, 06.06.2014, 12:15 Uhr in Briefkasten 132.
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Definitionen. Der *totale Variationsabstand* d_{TV} zweier Maße μ, ν auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist definiert als $d_{TV}(\mu, \nu) := \max_{A \in \mathcal{F}} |\mu(A) - \nu(A)|$.
Sind $X : (\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1) \to \mathbb{R}$, $Y : (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2) \to \mathbb{R}$ zwei Zufallsgrößen, so ist eine *Kopplung* von X und Y ein Tupel $(\hat{X}, \hat{Y})$ von Zufallsgrößen auf einem gemeinsamen W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ so, dass $\mathbb{P}_1(X \in \cdot) = \mathbb{P}(\hat{X} \in \cdot)$ und $\mathbb{P}_2(Y \in \cdot) = \mathbb{P}(\hat{Y} \in \cdot)$.

Aufgabe 1 (7 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Im Falle disketer Wahrscheinlichkeitsmaße μ, ν ist

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_x |\mu(\{x\} - \nu(\{x\})|$$

Im Falle von Maßen mit Lebesguedichten $f = \frac{d\mu}{d\lambda}, g = \frac{d\nu}{d\lambda}$ ist

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)| \, dx$$

(b) Zeigen Sie, dass für zwei diskrete Zufallsgrößen X, Y immer eine Kopplung existiert mit

$$\mathbb{P}(\hat{X} \neq \hat{Y}) = d_{TV}(\mathbb{P}(\hat{X} \in \cdot), \mathbb{P}(\hat{Y} \in \cdot))$$

Zeigen Sie ausserdem, dass für jede Kopplung $(\hat{X}, \hat{Y})$ allgemeiner Zufallsvariablen die Ungleichung

$$\mathbb{P}(\hat{X} \neq \hat{Y}) \geq d_{TV}(\mathbb{P}(\hat{X} \in \cdot), \mathbb{P}(\hat{Y} \in \cdot))$$

gilt.

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/SS14/StochModelle/`

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Betrachten Sie eine Zufallsvariable $X = \sum_{i=1}^n K_i$, wobei $K_1, \dots, K_n$ unabhängige Zufallsgrößen mit $K_i \sim \mathrm{Ber}(p_i)$ und $p_i \in [0,1]$ beliebig. Zeigen Sie, dass X im folgenden Sinne nahe bei einer $\mathrm{Poi}(\lambda)$-verteilten Zufallsgröße Y mit Parameter $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i$ liegt: Es existiert eine Kopplung $(\hat{X}, \hat{Y})$ von X und Y mit

$$\mathbb{P}(\hat{X} \neq \hat{Y}) \leq \sum_{i=1}^n p_i^2$$

Folgern Sie, dass es für $\lambda \geq 0$ eine Kopplung $(\hat{X}, \hat{Y})$ gibt mit $\hat{X} \sim \mathrm{Bin}(n, \lambda/n)$, $\hat{Y} \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ und

$$\mathbb{P}(\hat{X} \neq \hat{Y}) \leq \frac{\lambda^2}{n}.$$

Zeigen Sie ferner, dass für festgehaltenes λ und $n \to \infty$ man Konvergenz

$$n(\mathbb{P}(\hat{X} = 0) - \mathbb{P}(\hat{Y} = 0)) \to \kappa$$

gegen eine Konstante κ hat. Was ist die Konstante κ?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Es sei $G = (V, E)$ ein endlicher Wald (d.h. ein zykelfreier Graph mit endlicher Knotenmenge) und bezeichne mit $\mathcal{L} := \{x \in V \,|\, \deg(x) = 1\}$ die Menge der Blätter von G. Es sei $V = \mathcal{L} \dot{\bigcup} \mathcal{S}$ und es sei $\deg(x) \geq 3$ für alle $x \in \mathcal{S}$. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{S} \neq \varnothing$, so ist $|\,\mathcal{L}\,| \geq |\,\mathcal{S}\,| + 2$.