Übungen zur Vorlesung Stochastische Modelle[1]

Abgabetermin: Freitag, 06.06.2014, 12:15 Uhr in Briefkasten 132.
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (13 Punkte)

Seien E endliche Kantenmenge mit $|E| = N$ und $A \subset \Omega = \{0,1\}^E$ ein wachsendes Ereignis.

(a) Zeigen Sie: Aus der Eigenschaft, dass

$$\sum_{e \in E} I_A(e) \geq c\phi_p(A)(1-\phi_p(A)) \log(2/\max_e I_A(e))$$

für eine universelle Konstante $c > 0$ folgt, dass ein $e \in E$ mit

$$I_A(e) \geq c'\phi_p(A)(1-\phi_p(A))\frac{\log N}{N} \qquad (*)$$

existiert, wobei $c' > 0$ eine weitere universelle Konstante bezeichne.

(b) Seien $A \subset \Omega$, Π_E die Permutationsgruppe auf E und $\mathcal{A}$ eine Teilgruppe, welche auf E wirkt, so dass

(i) $\forall e, f \in E\ \exists \alpha \in \mathcal{A} : \alpha(e) = f$ (wir sagen "$\mathcal{A}$ wirkt transitiv auf E")

(ii) $\forall \alpha \in \mathcal{A} : A = \alpha(A) := \{\omega \in \Omega : (\omega_{\alpha(e)})_{e \in E} \in A\}$

Folgern Sie, dass dann $I_A(e)$ konstant in e ist.

(c) Sei A wie in Teil (b) und p_c der Wert von p mit $\phi_p(A) = \frac{1}{2}$. Man zeige, dass eine universelle Konstante $c'' > 0$ existiert mit

$$\mathbb{P}_p(A) \geq 1 - N^{-c''(p-p_c)} \text{ für alle } p \geq p_c.$$

Nutzen Sie zum Beweis (*) und Russo's Formel.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Wir betrachten Kantenperkolation auf $\mathbb{L}^2$ mit Parameter $p = \frac{1}{2}$. Wir bezeichnen $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}$ und die Zufallsvariable $\mathrm{rad} = \max\{n : 0 \leftrightarrow \partial[-n,n]^2\}$.

(a) Es bezeichne A_n das Ereignis, dass es einen wiederholungsfreien offenen Pfad von $\{-n\} \times \mathbb{Z}$ nach $\{n\} \times \mathbb{Z}$ durch die 0 existiert. Man zeige

$$\mathbb{P}(A_n) \geq \frac{1}{4n}.$$

Nutzen Sie hierzu, dass

$$\mathbb{P}(\exists \text{ offenen Pfad in } [0, n+1] \times [0, n] \text{ vom linken zum rechten Rand}) = \frac{1}{2}.$$

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/SS14/StochModelle/`

(b) Nutzen Sie die Berg-Kesten Ungleichung um zu zeigen, dass

$$\mathbb{P}(0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n) \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$