Übungen zur Vorlesung Stochastische Modelle[1]

Abgabetermin: Freitag, 23.05.2014, 12:15 Uhr in Briefkasten 132.
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Seien μ_1, μ_2 positive W-maße auf $\Omega = \{0,1\}^E$, E endlich, so dass

$$\mu_2(\omega^e)\mu_1(\omega_e) \geq \mu_1(\omega^e)\mu_2(\omega_e) \text{ für alle } \omega \in \Omega, e \in E \tag{*}$$

Zeigen Sie: Wenn es ein $\mu \in \{\mu_1, \mu_2\}$ gibt, welches

$$\mu(\omega^{ef})\mu(\omega_{ef}) \geq \mu(\omega_f^e)\mu(\omega_e^f) \text{ für alle } \omega \in \Omega, e, f \in E, e \neq f \tag{†}$$

erfüllt, so gilt

$$\mu_2(\omega_1 \vee \omega_2)\mu_1(\omega_1 \wedge \omega_2) \geq \mu_1(\omega_1)\mu_2(\omega_2) \tag{Holley}$$

Hinweis : Gehen Sie in folgenden Schritten vor

1. Zeigen Sie, dass die Bedingung (*) äquivalent ist zu $(**)\frac{\mu_2(\alpha)}{\mu_2(\beta)} \geq \frac{\mu_1(\alpha)}{\mu_1(\beta)}$ für alle $\alpha \geq \beta$
2. Folgern Sie aus (†)
$$\frac{\mu(\alpha^e)}{\mu(\alpha_e)} \geq \frac{\mu(\beta^e)}{\mu(\beta_e)}$$
für alle $\alpha \geq \beta$. Daraus können Sie
$$\frac{\mu(\omega_1 \vee \omega_2)}{\mu(\omega_2)} \geq \frac{\mu(\omega_1)}{\mu(\omega_1 \wedge \omega_2)} \tag{‡}$$
folgern.
3. Benutzen Sie 1. und 2., um die Holley-Ungleichung zu zeigen.

(b) Folgern Sie:
Ein positives Maß μ auf Ω erfüllt die FKG-Gitterbedingung

$$\mu(\omega_1 \vee \omega_2)\mu(\omega_1 \wedge \omega_2) \geq \mu(\omega_1)\mu(\omega_2) \tag{Gitterbedingung}$$

genau dann, wenn (Gitterbedingung) für alle ω_1, ω_2, die sich genau in 2 Einträgen unterscheiden, erfüllt ist.

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/SS14/StochModelle/`

(c) Zeigen Sie, dass (Gitterbedingung) äquivalent zur *Monotonie* von μ ist. Wir nennen dabei μ *monoton*, wenn

$$\begin{aligned} f(e,\beta) &:= \mu\left(\omega(e)=1 \,\middle|\, \omega(f)=\beta(f) \text{ für } f\neq e\right) \\ &\leq \mu\left(\omega(e)=1 \,\middle|\, \omega(f)=\alpha(f) \text{ für } f\neq e\right) \text{ für alle } \alpha\geq\beta \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Beweis von Theorem 4.29) (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass die im Beweis von Theorem 4.29 definierten Funktionen $(u_F, F\subset E)$ tatsächlich eine Orthonormalbasis von $L_2(\phi)$, $\phi := \bigotimes_{e\in E}(\frac{1}{2}\delta_1+\frac{1}{2}\delta_0)$ bilden.

Aufgabe 3 (FKG-Ungleichung für Gibbs-Maße) (2 Punkte)
Seien $G=(V,E)$ ein Graph mit einer endlichen Knotenmenge V, $\beta>0$, $\Omega=\{0,1\}^E$ und

$$\mu(\omega) := \frac{1}{Z}\exp\left(-\beta\sum_{\langle x,y\rangle\in E}\mathbb{1}_{\{\omega(x)\neq\omega(y)\}}\right) \text{ für } \omega\in\Omega,$$

wobei $Z\in(0,\infty)$ eine geeignete Normierungskonstante bezeichne. Zeigen Sie, dass μ die FKG-Gitterbedingung (Gitterbedingung) erfüllt.

Aufgabe 4 (Russo-Formel) (5 Punkte)
Sei X eine Zufallsvariable auf $\Omega=\{0,1\}^E$ mit E endlich.

(a) Zeigen Sie

$$\frac{d}{dp}\,\mathbb{E}_p(X) = \sum_{e\in E}\mathbb{E}_p(\delta_e X)$$

mit $\delta_e X(\omega) = X(\omega^e) - X(\omega_e)$

(b) Sei A ein wachsendes Ereignis. Wir nennen $e\in E$ *pivotal* für das Ereignis A in der Konfiguration $\omega\in\Omega$, wenn $\delta_e\mathbb{1}_A(\omega)=1$, und bezeichnen mit $N_A(\omega)$ die Anzahl der pivotalen e der Konfiguration ω für A. Zeigen Sie

$$\frac{d}{dp}\,\mathbb{P}_p(A) = \mathbb{E}_p(N_A)$$

Können Sie eine ähnliche Formel für die zweite Ableitung finden?