## Übungen zur Vorlesung Stochastische Modelle[1]

Abgabetermin: Freitag, 16.05.2014, 12:15 Uhr in Briefkasten 132.
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

**Aufgabe 1** (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass das Kantenperkolationsproblem auf einem beliebigen unendlichen verbundenen Graphen unabhängig vom Bezugspunkt ist. Zeigen Sie also, dass $p_c^x := \sup\{p \in [0,1] : \theta_x(p) = 0\}$ mit $\theta_x(p) := \mathbb{P}_p(|C_x| = \infty)$ unabhängig von der Wahl des Referenzknotens $x$ ist.

**Aufgabe 2** (Seperates Auftreten) (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass für die Kantenperkolation auf einem unendlichen Graphen

$$\{x \leftrightarrow \infty\} \cap \{y \leftrightarrow \infty\} = \{x \leftrightarrow \infty\} \circ \{y \leftrightarrow \infty\} \,\dot\cup \Big\{\omega \in \Omega : x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \infty,\, y \overset{\omega}{\leftrightarrow} \infty, \\ \exists e \in E : x \overset{\omega_e}{\not\leftrightarrow} \infty \text{ und } y \overset{\omega_e}{\not\leftrightarrow} \infty\Big\},$$

wobei $x \overset{\omega}{\leftrightarrow} \infty$ (bzw. $x \overset{\omega}{\not\leftrightarrow} \infty$) die Aussage bezeichne, dass $x$ Teil einer unendlich (endlich) großen Komponente unter der Konfiguration $\omega \in \Omega$ ist.

**Hinweis:** Insbesondere ist zu zeigen, dass die Mengen auf der rechten Seite disjunkt sind.

**Aufgabe 3** (FKG-Ungleichung für Folgen unabhängiger Zufallsvariablen) (5 Punkte)
Seien

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \text{ und } \mathbb{P} = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} (p_n\,\delta_1 + (1-p_n)\,\delta_0)$$

für eine $[0,1]$-wertige Folge $(p_n)$. Zeigen Sie für wachsende, beschränkte, messbare Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$, dass

$$\int (fg)d\,\mathbb{P} \geq \int f d\,\mathbb{P} \int g d\,\mathbb{P} \tag{FKG}$$

Gilt (FKG) auch allgemeiner für wachsende Funktionen $f, g \geq 0$?

**Hinweis**: Betrachten Sie

$$f_n := \mathbb{E}(f|\pi_1, ..., \pi_n)$$
$$g_n := \mathbb{E}(g|\pi_1, ..., \pi_n)$$

mit $\pi_i : \Omega \to \{0,1\}$, $\pi_i(\omega) = \omega_i$ für $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal ist und benutzen Sie Martingalkonvergenzsätze zum Beweis der Aussage.

[1]Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/SS14/StochModelle/`

**Aufgabe 4** (Kantenperkolation im Bienenwaben-Graph) (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass der kritische Perkolationsparameter $p_c$ auf dem Honigwaben-Graphen strikt kleiner als eins ist.

**Hinweis:** Eine Illustration des Honigwaben-Graphen findet man z.B. in Abbildung 1.5 auf Seite 18 des Buchs von Grimmet. Nutzen Sie zum Beweis das Peierls Argument.