

Übungen zur Vorlesung Stochastische Modelle¹

Abgabetermin: Freitag, 9.05.2014, 12:15 Uhr in Briefkasten 132.

Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (Länge eines runs beim Werfen einer Münze) (5 Punkte)

Betrachten Sie die Kantenperkolation auf dem eindimensionalen Gitter \mathbb{L} mit Parameter p . Sei

$$\text{für } k \in \mathbb{Z} : r_k := \max\{u \in \mathbb{N} \mid k \leftrightarrow k + u\}$$

$$\text{für } n \in \mathbb{N} : L_n := \max\{r_k \mid 1 \leq k \leq n\}$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}_p(L_n > u) \leq np^u$ und folgern Sie für beliebige $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}_p\left(L_n > \frac{(1 + \varepsilon) \log n}{\log(1/p)}\right) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Aufgabe 2 (Subadditive Folgen) (5 Punkte)

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit

$$x_{m+n} \leq x_m + x_n$$

für alle $m, n \geq 1$. Zeigen Sie dass

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{x_k}{k} \in [-\infty, \infty)$$

und insbesondere, dass der Limes existiert.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Betrachten Sie das Gitter $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$. Ein *wiederholungsfreier Pfad* ist ein Pfad, der keinen Knoten mehr als einmal durchläuft.

Sei y_n die Anzahl wiederholungsfreier Pfade der Länge n , die in 0 starten.

(a) Zeigen Sie, dass der Limes

$$\chi := \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n)^{1/n}$$

existiert.

¹Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
<http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/SS14/StochModelle/>

(b) Zeigen Sie die Ungleichung

$$d \leq \chi \leq (2d - 1)$$

.

Aufgabe 4

(5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Zahl der Zyklen mit Länge n des Gitters \mathbb{L}^2 , welche 0 einschließen, kleiner gleich $n4^n$ ist.