Übungen zur Vorlesung Stochastische Modelle[1]

Abgabetermin: Freitag, 2.05.2014, 12:15 Uhr in Briefkasten 132.
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Sei $G = (V, E)$ zusammenhängender endlicher Graph.Zeigen Sie die folgenden Erweiterungen zu Theorem 2.1:

(a) Für $B \subset E, g \in E \setminus B$ ist

$$\mathbb{P}(B \subset T | g \in T) \leq \mathbb{P}(B \subset T).$$

(b) Sei $G' = (V', E')$ zusammenhängender Teilgraph von G. Seien T, T' USTs auf G bw. G'. Zeigen Sie, dass für alle $B \subset E'$ gilt:

$$\mathbb{P}(B \subset T') \geq \mathbb{P}(B \subset T).$$

Überlegen Sie sich die Aussage zunächst für eine einelementige Menge B.

Hinweis: Sind $f \in E$ und $B \subset E$ mit $f \notin B$ sodass Spannbäume existieren mit Kantenmenge $E^{'} \supset B$ so ist

$$\mathbb{P}(f \in T | B \subset T) = R^B_{eff}(x, y)$$

wobei $R^B_{eff}(x, y)$ den effektiven Widerstand zwischen x und y bei Anlegen eines Einheitsstroms mit Widerständen

$$\begin{aligned} r_e &= 0, \quad \text{für alle } \ e \in B \\ r_e &= 1, \ \text{sonst} \end{aligned}$$

bezeichnet.

Aufgabe 2 (7 Punkte)
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängendes elektrisches Netzwerk mit positiven Leitfähigkeiten $(w_e : e \in E)$. Es sei $\mathcal{F}$ der Raum der Flüsse auf G und $d^* : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^V$ sei definiert durch

$$d^* j(v) := \sum_{w: w \sim v} j_{w,v}$$

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/SS14/StochModelle/`

Es bezeichne $\mathcal{F}_0$ die Menge der Kreisflüße auf G, d.h. die Menge der Flüsse $j : E \to \mathbb{R}$ mit $d^*j = 0 \in \mathbb{R}^V$. Ferner bezeichne $\mathcal{F}_1$ die Menge der Einheitsflüsse für zwei verschiedene fixierte Knoten $x, y \in V$. Ein Fluss j heißt *Potentialfluss*, wenn eine Funktion $\phi : V \to \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$j_{x,y} = (d\phi)_{x,y} := (\phi(y) - \phi(x))w_{x,y}$$

Wir definieren durch

$$\langle j \mid k \rangle_{\mathcal{F}} := \sum_{\langle x,y \rangle \in E} \frac{1}{w_{x,y}} j_{x,y} k_{x,y}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{F}$.

(a) Welchen Bildbereich $\mathcal{B}$ hat der Operator d^*, wenn er als lineare Abbildung auf dem Raum der Flüsse betrachtet wird?

(b) Zeigen Sie, dass die Operatoren d und d^* adjungiert sind, d.h. dass für $\phi : V \to \mathbb{R}$ und einen Fluss k

$$\langle d\phi \mid k \rangle_{\mathcal{F}} = \langle d^*k \mid \phi \rangle \,,$$

wobei das Skalarprodukt auf der rechten Seite das euklidische bezeichne.

(c) Zeigen Sie, dass der Raum der Flüsse die orthogonale Summe der Kreis- und Potentialflüsse ist.

(d) Zeigen Sie, dass es für jedes $b \in \mathcal{B}$ *genau einen* Potentialfluss j mit $d^*j = b$ gibt.

(e) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für einen Fluss $j \in \mathcal{F}_1$:

(i) j minimiert die Energienorm E auf $\mathcal{F}_1$

(ii) $j \perp \mathcal{F}_0$

(iii) j ist ein Potentialfluss

(iv) j ist der Stromfluss bei anlegen der Spannung von $1/R_{eff}$ Volt zwischen x und y

Hinweis: Nutzen Sie in den Beweisen, dass für jedes $b \in \mathcal{B}$ sogar ein Potentialfluss e mit $d^*e = b$ existiert.