Übungen zur Vorlesung Stochastische Modelle[1]

Abgabetermin: Freitag, 25.04.2014, 12:15 Uhr in Briefkasten 132.
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (Eindeutigkeitssatz) (5 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein endliches zusammenhängendes Netzwerk mit Leitfähigkeiten $(w_e : e \in E)$ und $W \subsetneq V$. Seien $f, g : V \to \mathbb{R}$ harmonisch auf W und sei $f(v) = g(v)$ für alle $v \in V \setminus W$. Zeigen Sie mithilfe des Maximumsprinzips, dass $f \equiv g$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Verallgemeinern Sie die Aussage von Theorem 1.16 (vgl. Präsenzübung) auf allgemeine positive Leitfähigkeiten: Zeigen Sie für einen endlichen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ mit positiven Leitfähigkeiten $(w_e, e \in E)$, dass

$$i_{a,b} = \frac{1}{N^*}(N^*(s, a, b, t) - N^*(s, b, a, t))$$

einen Einheitsfluss von s nach t definiert, welcher die Kirchhoffschen Regeln erfüllt. Dabei bezeichne $\mathcal{T}$ die Menge der aufspannenden Bäume auf G,

$$w(T) := \prod_{\langle x, \langle y \rangle \in T} w_{\langle x, \langle y \rangle}, \; N^* := \sum_{T \in \mathcal{N}} w(T), \quad \text{und } N^*(s, a, b, t) := \sum_{T \in \mathcal{N}(s,a,b,t)} w(T).$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ ein unendlicher zusammenhängender Graph mit einem ausgezeichneten Knoten $0 \in V$ (Wurzel). Ferner bezeichne für $n \in \mathbb{N}$, E_n die Menge der Kanten, die Knoten mit Abstand $n - 1$ und n zur Wurzel verbinden, d.h.

$$E_n = \{\langle x, y \rangle \in E : d(0, x) = n - 1, d(0, y) = n\}.$$

Man beweise, dass die symmetrische Irrfahrt auf G rekurrent ist, wenn

$$\sum_{n \geq 0} |E_n|^{-1} = \infty.$$

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/SS14/StochModelle/`