Übungen zur Vorlesung Stochastische Modelle[1]

Abgabetermin: Montag, 07.07.2014, 12:15 Uhr in Briefkasten 132.
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (Size-biased distribution) (7 Punkte)
Es sei D eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsgröße mit $\mathbb{P}(D \geq 1) > 0$ und $\mathbb{E}(D) < \infty$. Wir bezeichnen mit D^* eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsgröße mit $\mathbb{P}(D^* = k) = \frac{k\,\mathbb{P}(D=k)}{\mathbb{E}\,D}$ (die zugehörige Verteilung nennen wir *size-biased distribution* zu D).

(a) Sei $D \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$. Wie ist dann $D^* - 1$ verteilt?

(b) Wir betrachten N nummerierte Boxen, gefüllt mit $k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{N}$ Kugeln. Es bezeichne X die Anzahl der Kugeln in einer gleichverteilten Box. Ferner bezeichne Z eine gleichverteilte Kugel und Y die Gesamtzahl der Kugeln in der Box, die Z enthält. Es sei nun X die Anzahl der Kugeln in einer uniform auf $\{1, ..., N\}$ gewählten Box. Stellen Sie die Verteilung von Y mithilfe der Verteilung von X dar.

(c) Es seien $(X_v)_{v \in \mathbb{N}^*}$ unabhängige Zufallsgrößen mit $X_\epsilon \sim D$ und $X_v \sim D^* - 1$ für alle $v \in \mathbb{N}^* \setminus \{\epsilon\}$. Wir betrachten den Zufallsbaum $\mathcal{T}$ mit folgender Bildungsregel:

(i) $\epsilon \in \mathcal{T}$

(ii) $\forall (v, j) \in \mathbb{N}^*$ mit $j \in \mathbb{N}$ gilt $(v, j) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow v \in \mathcal{T}, j \leq X_v$

Sei $\zeta := \mathbb{P}(|\mathcal{T}| = \infty)$ die Überlebenswahrscheinlichkeit des obigen Verzweigungsprozess. Zeigen Sie, dass sich ζ in der Form $\zeta = 1 - G_D(p)$ schreiben lässt, wobei G_D die Erzeugendenfunktion von D ist. Geben Sie an, welche Gleichung p dabei erfüllt.

Benutzen Sie für die folgende Aufgabe das

Theorem. *Für alle $N \in \mathbb{N}$ bezeichne G_N einen $\mathrm{ER}_N(p_N)$-Graph. Gilt $Np_N - \log N \to \infty$ so folgt*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(G_N \textit{ ist zusammenhängend }) = 1$$

Gilt $Np_N - \log N \to -\infty$ so folgt

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(G_N \textit{ ist unzusammenhängend }) = 1$$

[1]Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/SS14/StochModelle/`

Aufgabe 2 (8 Punkte)
Für alle $N \in \mathbb{N}$ bzeichne $G_N = ([N], E_N)$ einen deterministischen Graphen, sodass jede Komponente mindestens k_N Knoten enthält. Legen Sie über diesen Graphen einen Erdös-Rényi-Graphen mit Parameter $p_N = \lambda/N$, d.h. wir bilden einen Graphen G_N^{ER} indem wir jede Kante $\langle x, y\rangle \in K_N \backslash E_N$ unabhängig voneinander mit W'keit p_N zu G_N hinzufügen. Dabei sei k_N eine Folge mit

$$k_N \geq \frac{2 \log N}{\lambda} \ \forall N \in \mathbb{N}$$

Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}(\text{der Graph } G_N^{\text{ER}} \text{ ist zusammenhängend }) \to 1 \ \text{ für } N \to \infty.$$

Man zeige ferner, dass es deterministische Graphen (G_N) wie oben gibt mit $k_N \geq \frac{1}{2\lambda} \log N$ für die

$$\mathbb{P}(\text{der Graph } G_N^{\text{ER}} \text{ ist zusammenhängend }) \to 0 \ \text{ für } N \to \infty.$$

Hinweis: Benutzen Sie ein geeignetes Kopplungsargument, um die Konnektivität im Graphen G_N^{ER} zurückzuführen auf die Konnektivität eines ER-Graphen um damit obiges Theorem anwenden zu können. Für diese Argumentation ist es hilfreich, wenn die Komponenten von G_N^{ER} annähernd gleich groß sind (überlegen Sie sich, wie Sie das erreichen können).