Übungen zur Vorlesung Stochastische Modelle[1]

Abgabetermin: Freitag, 27.06.2014, 12:15 Uhr in Briefkasten 132.
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

(Auf diesem Zettel gibt es insgesamt 4 Bonuspunkte)

Aufgabe 1 (Typische Abstände) (8 Punkte)
Sei $(G_N : N \in \mathbb{N})$ ein $\mathrm{ER}_N(\lambda)$-Netzwerk mit $\lambda > 1$. Betrachten Sie den zufälligen Ball um 1 mit Radius r, d.h.

$$B_N(1,r) := \{v \in [N] : d_N(1,v) \le r\}.$$

(a) Man zeige, dass

$$\mathbb{E}[|B_N(1,r)|] \le \frac{\lambda}{\lambda - 1}\lambda^r.$$

(b) Zeigen Sie, dass für $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\Big(d_N(1,V_N) \le (1-\varepsilon)\frac{\log N}{\log \lambda}\Big) \to 0,$$

wobei V_N einen unabhängigen auf $[N]$ gleichverteilten Knoten bezeichne.

Aufgabe 2 ("Übersehene"Kanten in der Exploration) (8 Punkte)
Wir untersuchen in der knotenweisen Exploration im $\mathrm{ER}_N(p)$-Grapen G, die Zahl X_n der Kanten, die zwischen dem im n-ten Schritt zu explorierende Knoten und den bereits in $\mathcal{E}_{n-1}$ explorierten Knoten, die noch nicht in $\mathcal{E}_{n-1}$ auftreten (diese Kanten werden üblicherweise nicht exploriert).

(a) Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und g_n eine Konfiguration des Explorationsgraphen mit $\mathbb{P}(\mathcal{E}_n = g_n) > 0$ mit mindestens einem aktiven Knoten. Ferner bezeichne a die Aktivierungszeit des als nächstes zu explorierenden Knotens in der Konfiguation g_n. Zeigen Sie:

$$\mathcal{L}(X_{n+1} \mid \mathcal{E}_n = g_n) = \mathrm{Bin}(n-a,p).$$

(b) Zeigen Sie: Für das Ereignis A_n, dass der Teilgraph von G eingeschränkt auf die explorierten Knoten in $\mathcal{E}_n$ *kein* Baum ist, gilt

$$\mathbb{P}(A_n) \le n^2\, p.$$

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite: `http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/SS14/StochModelle/`

(c) Sei $\lambda' > \lambda > 1$ und $(G_N, N \in \mathbb{N})$ ein Erdös-Renyi Netzwerkmodell mit Intensität λ. Dann gilt

$$\mathbb{P}\Big(G|_{B_N(1,\frac{\log N}{2\log\lambda'})} \text{ ist kein Baum}\Big) \to 0.$$

<u>Hinweis:</u> Nutzen Sie die Abschätzung (a) aus der vorhergehenden Aufgabe.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Es sei $(G_N : N \in \mathbb{N})$ ein Erdös-Renyi Netzerk mit Intensität λ. Zeigen Sie für $k \in \mathbb{N}_0$ die Konvergenz

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\{\deg_{G_N}(i)=k\}} \xrightarrow{P} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{für } N \to \infty$$

Hinweis: Gehen Sie folgendermaßen vor:

1. Sei $X_i := \mathbb{1}_{\{\deg_{G_N}(i)=k\}}$. Zeigen Sie: Ist V $\{1,...,N\}$-wertige Zufallsgröße mit $\mathbb{P}(V = i) = \frac{1}{N}$, unabhängig von der Graphenkonstruktion G_N, so ist

$$\mathbb{E}\, S_N^2 = N^2\, \mathbb{E}(X_1 X_V)$$

2. Berechnen Sie den Erwartungswert von $S_N := \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{\deg_{G_N}(i)=k\}}$ sowie das zweite Moment $\mathbb{E}(S_N)^2$. Benutzen Sie dann die Chebychev-Ungleichung um zu zeigen, dass die Zufallsgrößen $(\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{\deg_{G_N}(i)=k\}})_{N\in\mathbb{N}}$ um ihren Erwartungswet herum konzentriert sind.