Übungen zur Vorlesung Stochastische Modelle[1]

Abgabetermin: Dienstag, 22.04.2014, 12:15 Uhr in Briefkasten 132.
Bitte geben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{0, 1, ..., N\}$ und $E = \{\langle i, i+1\rangle | i = 0, ..., N-1\}$. Betrachte auf dem Graphen die Markovkette Z mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} &p_{i,i+1} = 1 - p \text{ für } i = 1, ..., N-1 \\ &p_{i+1,i} = p \text{ für } i = 0, ..., N-2 \\ &p_{N,N-1} = 1 \\ &p_{0,1} = 1 \\ &p_{i,j} = 0 \text{ sonst} \end{aligned}$$

(a) Geben Sie Leitfähigkeiten $(w_e : e \in E)$ an, sodass die entsprechende Markov-Kette obiger Kette Z entspricht.

(b) Man berechne
$$g(u) := \mathbb{P}_u(Z \text{ berührt } 0 \text{ vor } N)$$
für $u = 0, .., N$. Ist g harmonisch?

(c) Wie groß ist der effektive Widerstand zwischen 0 und N für die von Ihnen gewählten Leitfähigkeiten?

Aufgabe 2 (Maximumsprinzip) (5 Punkte)
Sei $G = (V, E)$ ein Netzwerk mit Leitfähigkeiten $(w_e : e \in E)$, $H = (W, E')$ ein zusammenhängender Teilgraph von G und $f : V \to [0, \infty)$ harmonisch auf der Knotenmenge W. Man zeige: Gilt

$$\max_{v \in W} f(v) = \max_{v \in V} f(v),$$

dann ist f auf $W \cup \partial W$ konstant, wobei

$$\partial W := \{v \in V \setminus W | v \sim w \text{ in } G \text{ für ein } w \in W\}$$

den graphentheoretischen äußeren Rand von W in G bezeichne.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass der effektive Widerstand zwischen zwei Knoten s und t eines Graphen $G = (V, E)$

[1] Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden sie auf der Internetseite:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/SS14/StochModelle/`

konkav in der Wahl der Widerstände ist. D.h. für zwei Vektoren $r^1 = (r_e^1 : e \in E)$ und $r^2 = (r_e^2 : e \in E)$ von Widerständen und $\alpha \in [0,1]$ gilt

$$R_{eff} \geq \alpha R_{eff}^1 + (1-\alpha) R_{eff}^2,$$

wobei R_{eff}^1 und R_{eff}^2 die effektiven Widerstände bzgl. r^1 und r^2 und R_{eff} den effektiven Widerstand bzgl. $r = \alpha r^1 + (1-\alpha) r^2$ bezeichne.

Hinweis: Gehen Sie analog zum Beweis des Rayleigh-Prinzips vor.