Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2014

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 05** **05.05.2014**

Aufgabe 1: Hedge einer Exchange Option 4 Punkte

Wir betrachten einen Finanzmarkt mit zwei risky assets S_1, S_2, deren Preisprozesse die folgenden stochastischen Differentialgleichungen erfüllen.

$$dS_i(t) = S_i(t)\sigma_i(t)dW_i(t)$$

bei positiven Anfangswerten $S_i(0)$ für $i = 1, 2$ und $0 \leq t < T$ mit deterministischen Koeffizientenfunktionen σ_1, σ_2, die $\int_0^T \sigma_i^2(s)ds < \infty$ für $i = 1, 2$ erfüllen. Für die Aufgabe nehmen wir an, dass die Zinsrate r des Geldmarktkontos die Bedingung $r(t) = 0$ erfüllt. Das subjektive Maß ist also schon ein äquivalentes Martingalmaß.

Berechnen Sie eine Hedgestrategie für eine Exchange Option, die in T die Auszahlung $(S_1(T) - S_2(T))^+$ liefert.

Hinweis: Berechnen Sie in zu Blatt 2 analoger Weise, den Preis zum Zeitpunkt t, wenn $S_1(t) = x_1, S_2(t) = x_2$ ist. Wenden Sie auf die so erhaltene Preisfunktion die Ito-Formel an, um die Hedgestrategie zu bestimmen. Dies ist ein ähnliches Vorgehen wie beim Delta-Hedge einer Calloption.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Geben Sie ein Beispiel für einen Finanzmarkt, der die Annahmen der Vorlesung erfüllt und in dem der Preisprozess eines risky assets für t gegen T gegen 0 konvergiert $\mathbb{P}$ fast sicher.

Aufgabe 3: Allgemeine Callformel 4 Punkte

Gegeben sei eine Wienerfiltration eines n-dimensionalen Wienerprozesses über einen Handelszeitraum $[0, T]$, ein Bankkontoprozess β der Form

$$\beta(t) = \exp(\int_0^t r(s)ds)$$

mit stetigem adaptierten Zinsratenprozess r und ein positiver Aktienpreisprozess $(S(t))_{0\leq t\leq T}$ mit stetigen Pfaden.

Wir nehmen an, dass ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ vorliegt und wollen eine Calloption mit Laufzeit T und Basis K bewerten.

Zeigen Sie, dass es zu $\mathbb{P}^*$ äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_1^*, \mathbb{P}_2^*$ gibt mit

$$\mathbb{E}^* \frac{(S(T) - K)^+}{\beta(T)} = S(0)\mathbb{P}_1^*(S(T) > K) - KB(0, T)\mathbb{P}_2^*(S_T > K),$$

wobei $B(0, T) = \mathbb{E}^*\beta(T)^{-1}$.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Gegeben sei ein eindimensionales Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten. Wir bezeichnen mit (S_t) den Aktienpreisprozess und betrachten eine Call-Option mit Laufzeit T zur Basis K, die entsprechend ihrem arbitragefreien Preisprozess

$$C(t) = e^{r(t-T)}\mathbb{E}^*((S_T - K)^+|\mathfrak{F}_t)$$

für alle $0 \leq t \leq T$ gehandelt werden kann.

1. Welche stochastische Differentialgleichung erfüllt $(C(t))_{0\leq t\leq T}$.
2. Wie kann durch einen Handel in Aktie und Call-Option das Geldmarktkonto repliziert werden?

Abgabe: Die. 13.05.2014 bis spätestens 12.00 Uhr im Fach 131